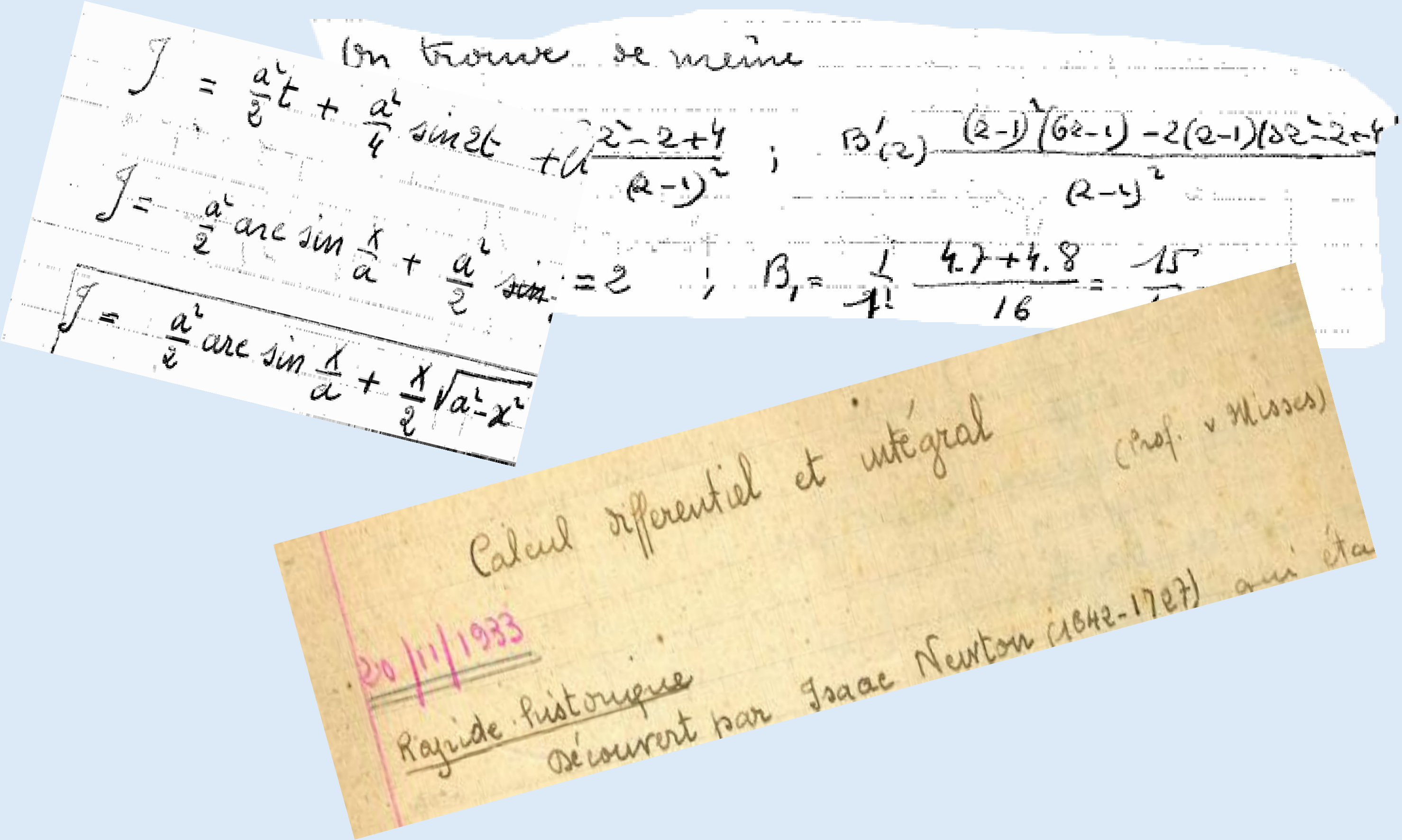
Notes de cours de Yomtov Garti

Enseignements de Richard Von Mises (Années 1933 – 1935)



Calcul différentiel et intégral

20/11/1933

(Prof. v Misses)

Rapide historique

Découvert par Isaac Newton (1642-1727) qui était un grand mathématicien, astronome, physicien et philosophe, auteur de Mécaniques Célestes et Terrestres

Prédécesseurs:

- Platon [400 env av. J.C)
- Géomètres italiens et français des 13e et 14e siècle

Il n'est pas le dernier à s'être occupé de ce calcul; tous les savants du monde entier en ont vu l'utilité et s'en sont occupés. Entre autres : Euler (Allemand)

Cauchy (Français)

---

§ I - Variables et fonctions

Mütehavviller ve tabiler

Une équation où il y a des lettres, c'est une abréviation d'équations numériques en nombre illimité

Exemples:

$$a + b = c \quad (1)$$

$$4x^2 + 3 = 5y \quad (2)$$

$$3x + 5 = 7x - 3 \quad (3)$$

- Nous ne nous occuperons que de celles qui contiennent au moins deux variables. Comme (2) ou $a\cos x = b\cos y$
- Ordinairement les dernières lettres de l'alphabet désignent les inconnues et les premières les constantes
- A noter que les variables sont liées l'une à l'autre. Ainsi l'équation (2) peut s'écrire

$x = \sqrt{\frac{5y-3}{4}}$ $\quad x = f(y) \quad$ x = tabi mütehavvil; y = müstakil müt

$y = \frac{4x^2+3}{5}$ $\quad y = f(x) \quad$ y " " x = "

- La dépendance fonctionnelle existe ~~entre~~ dans les applications des maths comme dans celles de la [illegible]

Exemples:

1) Un thermomètre donne la température.

- Une horloge donne l'heure à chaque instant $t = f(h)$ d'où dépendance fonctionne entre temps et heure

2) vitesse et espace parcouru $e = f(v)$

3) $v^2 = 2gh$

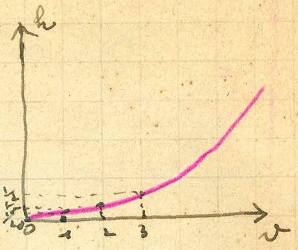
21|11|1933

Étude de $v^2 = 2gh$

$v^2 - 2gh = 0$ fonction implicite

$h = \frac{v^2}{2g}$ } " explicite

$v = \sqrt{2gh}$ }



Représentation graphique

Supposons $g = 10$

on a : $h = \frac{v^2}{20}$

v	1	2	3	…
h	$1/20$	$1/5$	$9/20$	

En joignant tous les points on obtient une courbe

Cependant en prenant $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{20h}$

on a :

h	$1/5$	1
v	2	$\sqrt{20}$

Ainsi pour $h = 1$ $v = \sqrt{20}$. Or $4 < \sqrt{20} < 5$

Posons $v = \frac{a}{b}$ ou $v^2 = \frac{a^2}{b^2} = 20$ a et b étant premiers entre eux, ceci est impossible et par conséquent $\sqrt{20}$ n'est ni entier ni fractionnaire. Qu'est-ce donc ?

__Difficulté__ – Pour toutes les valeurs de h, on n'a pas nécessairement un point de la courbe, tandis qu'au 1° nous n'avions pas cette difficulté qui ne peut pas être approfondie maintenant

Cependant examinons-la un peu :

Comme la courbe a été tracée continuellement au 1° il est impossible de s'imaginer qu'il n'y ait pas pour v une valeur quand h=1. Donc il y a des nombres ni entiers ni fractionnaires.

Il est évident qu'il y a un nombre infini de nombres entiers et fractionnaires (leur ~~ensemb~~ ensemble est dit dense) – Cependant il y aussi des nombres ($\sqrt{20}$ par exemple) qu'il s'agit de pouvoir calculer.

Ce qui exige une théorie, celle des nombres irrationnels (gasam adeffer) qu'il faut définir d'abord afin de pouvoir opérer sur ces nombres

Théorie Dedekind (XIX^e siècle)

Théorie suffisante – qui part d'une définition générale comprenant les nombres rationnels et irrationnels

Idée de Coupure (Kesim) introduite par Dedekind

$\sqrt{20}$ signifie qu'il y a une infinité de nombres dont les carrés sont inférieurs ou supérieurs à 20

Tout ~~les~~ nombre entier ou fractionnaire est nécessairement inférieur ou supérieur à $\sqrt{20}$. Donc $\sqrt{20}$ divise tous les nombres en

2 catégories. Ainsi tous les nombres définissent une coupure divisent toutes la série de nombres en deux parties (inférieure, supérieure)

Pour les nombres

1/ rationnels il y a une partie inférieure ou une supérieure et une égale

2/ irrationnels, il n'y a pas de nombre égal

Il faut donc définir les quatre opérations de manière qu'il n'y ait que l'idée de coupure

22/11/1933

Chaque opération effectuée sur les nombres irrationnels sera considérée comme effectuée sur des nombres rationnels

Chaque nombre rationnel appartient où la partie inférieure où à la partie supérieure

Par exemple: par le signe $\sqrt{47}$ une coupure est définie parce que si nous prenons un nombre rationnel est supérieur ou inférieur à $\sqrt{47}$ ainsi les nombres sont divisés en 2 par 47.

Ainsi tous les $\sqrt{\ }$ donnent une coupure

Ière classe | IIe classe

Qualités de la coupure

Il n'existe pas un nombre qui soit le plus grand dans la 1ère classe

Cherchons la coupure $\sqrt{a}$

Pour démontrer ce théorème montrons que si on donne un nombre dans la 1ère classe, il existe un autre supérieur dans cette classe.

Soit le nombre b de la 1ère classe ($b^2 < a$)

1/ Cas. $b+1 < \sqrt{a}$ appartient à la 1ère classe
$(b+1)^2 < a$ ce qu'il fallait démontrer

2/ $b+1 > \sqrt{a}$. Prenons $b+\varepsilon$ $\left[\varepsilon = \dfrac{a-b^2}{2b+1}\right.$ (1)

ε est positif car $b^2 < a$

Il faut démontrer que $b+\varepsilon$ appartient à la 1ère classe.

On a: $b^2+2b+1 > a$ ou $2b+1 > a-b^2$

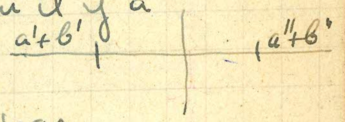
ou $\dfrac{a-b^2}{2b+1} = \varepsilon < 1$ ou $\varepsilon^2 < \varepsilon$

nombres rationnels de la 1re classe de l'une appartient aussi à la 1ere classe de l'autre.

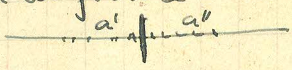
On a $A > B$ s'il existe un nombre rationnel
$s >$ nombres de Ière classe relatifs à B
$s <$ " " IIe " " " A

Par exemple $A = \sqrt{50}$ $B = \sqrt{20}$. Soit $s = 5$
5 est plus grand que tous les nombres de la Ière classe relative à B [25 > 20
5 est plus petit que tous les nombres de la IIe classe de A [25 < 64]

Nous arrivons à l'addition.
Soient A et B deux coupures
Soient $a' < A < a''$ [a' est un nombre rationnel de 1re classe et a'' un nombre de seconde]
De même $b' < B < b''$
ajoutons : $a' + b'$ et $a'' + b''$
Il est évident que $a' + b' < a'' + b''$
Nous avons ainsi 2 sortes de nombres $a' + b'$ et $a'' + b''$ les uns inférieurs et les autres supérieurs.
Cependant on ne peut pas dire qu'il y a encore une coupure car il se peut que



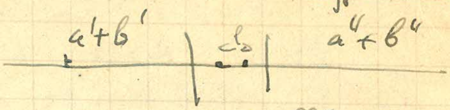
Il faut démontrer que ceci n'existe pas
Nous savons qu'il n'existe pas de nombre plus grand que a' et b', par suite dans leur somme $a' + b'$
Il en est de même pour $a'' + b''$ [il n'existe pas de nombre inférieur)
D'autre part est-il possible qu'il existe des nombres qui ne sont pas de la forme a' et a''
Ceci est très possible car



Alors on peut dire que $a' + b'$ et $a'' + b''$ ne définissent pas une coupure car ils ne partagent pas les nombres en 2 classes exactes
Par exemple si $A = 2 + \sqrt{3}$ et $B = 7 - \sqrt{3}$
on a $A + B = 9$

Il est donc possible que la somme des nombres irrationnels est un nombre rationnel

Il est impossible qu'il existe 2 nombres différents qui n'appartiennent ni à $a'+b'$ et $a''+b''$



car s'ils existent il y a entre eux une différence l – ceci est en contradiction avec le théorème d'approchement car nous pourrons choisir

$$a''-a' \leq \frac{l}{4} \quad \text{et} \quad b''-b' \leq \frac{l}{4}$$

ou $(a''+b'') - (a'+b') \leq \frac{l}{2}$

ce qui est impossible car nous avons posé au début : $a'+b' < l < a''+b''$

Donc la supposition est absurde et le théorème est démontré

On a alors 2 cas

1° S'il existe un nombre entre $a'+b'$ et $a''+b''$ qui n'appartienne ni à l'une série ni à l'autre la somme peut être un nombre rationnel

2° S'il n'existe pas un tel nombre il y a évidemment une coupure et la somme est un nombre irrationnel

En résumé on peut établir ce que comprennent les nombres réels

n. entiers } nombres rationnels } nombres réels
n. fractionnaires
n. irrationnels

C'est-à-dire que les nombres réels comprennent des nombres rationnels qui sont entiers ou fractionnaires et des nombres irrationnels.

23/11/1933

Reprenons les fonctions et l'exemple $v^2 = 2gh$ que l'on peut écrire : $h = \frac{v^2}{2g}$, $v = \sqrt{2gh}$

Les connaissances élémentaires d'arithmétique donnent ici une contradiction car comme nous l'avons vu ~~aux~~ aux coordonnés horizontales correspondaient des coordonnés verticales. Mais la réciproque n'était pas vraie. Comme nous savons vu que les nombres irrationnels étaient réels nous pouvons dire que la ~~valeur~~ variable réelle prend toute les valeurs rationnelles ou irrationnelles et que entre les valeurs rationnelles il y a un grand nombre de nombres irration.

En résumé nous disons que la variable réelle h ou v parcourt un **continu linéaire** (tous les nombres réels)

Enfin pour terminer afin de montrer que h est une fonction de v on dit que

$$h = f(v)$$

et que $v = \varphi[h]$

Souvent on désigne la variable dépendante par y et la variable indépendante par x : $y = f(x)$

La fonction $h = \frac{v^2}{2g}$ est une **fonction rationnelle** car si v est un nombre rationnel h l'est aussi

La fonction $v = \sqrt{2gh}$ est **irrationnelle** Mais il faut retenir que cette fonction peut prendre des valeurs rationnels

---

§ - 2, Ensembles (Menge) des nombres - Limites

1) Soit la suite 1, 2, 3, 4, 5 – c'est un ensemble fini

2) " " " 1, 2, 3, 4 ...... n " " " infini

3) Un ensemble fini peut être écrit en entier

Un ensemble infini est défini par une loi :

[Exemples : ~~3~~/ – 1, –2, –3 ...... – n

" 4/ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots\ldots \frac{1}{n+1}$

" 5/ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$

6/ Somme de 2 ensembles [2 et 5]

$1, 2, \frac{1}{2} ; 3, \frac{1}{3} + \frac{2}{3} ; 4 \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4} \ldots\ldots$

7/ Somme de (1) et 4

$5, 4, 3, 2, 1 \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$

8/ On peut prendre d'autres sortes d'ensembles,

$0 < x < 1$

x prend toutes les valeurs réelles [rationnelles et irrationnelles]
Attention à ce que 0 et 1 n'appartient pas à l'ensemble

9/ $0 \leq x \leq 1$ [différent de 8 car il contient 0 et 1]

10/ $-4, -3, -2, -1, 0$; $0 < x < 1$; $1, 2, 3, 4$ } ensemble

On peut représenter un ensemble par une ligne.

[Ensembles de points = ensemble de nombres]

Caractéristiques des ensembles

1/ Existe-t-il toujours dans un ensemble un nombre plus grand qu'un nombre donné ?

Dans les numéro 2 non
Dans 3 oui

Un ensemble est supérieurement borné s'il existe des nombres supérieurs au premier

Un ensemble est inférieurement borné s'il existe des nombres inférieurs au dernier

La borne supérieure est telle que chaque nombre est inférieur à cette borne et ~~supérieur~~ qu'il existe au moins un nombre supérieur
$M - \varepsilon$ ~~est surpassé par un nombre~~ si petit que ε soit

Cherchons les bornes supérieures des exemples précédents
Dans 1/ c'est 5 car $5 \geq 5 - \varepsilon$
3/ c'est -1 $-1 \geq -1 - \varepsilon$

Envisageons maintenant le cas 8/
cet E est supérieurement borné et ~~inférieurement borné~~ nous avons une

borne supérieure sans que cette borne appartienne à l'ensemble

On peut faire de même pour la borne inférieure m : m n'est supérieur à aucun nombre de l'ensemble mais $m+\varepsilon$ surpasse un nombre de l'ensemble

La différence $M - m$ = oscillation = Schwankung

Remarque – Dans les définitions de borne inf. et sup. il n'y a pas de donnée au sujet de l'ordre. Aussi l'ordre n'intervient pas dans la définition.

Au lieu de parler d'un ensemble sans ordre nous parlerons d'une variable x qui passe par toutes les valeurs successivement de manière que nous puissions déterminer les valeurs précédentes ou suivantes

On dit que x passe par une suite de valeurs

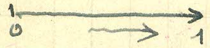
Par exemple

Prenons le numéro 4) on a : $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots\dots \frac{1}{n} \dots$

Insistons sur l'ordre

alors $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$ ... $x_n = \frac{1}{n+1}$

N° 9/ $0 \leq x \leq 1$ x est une variable qui commence par 0 et va jusqu'à 1 en passant par toutes les valeurs réelles



Définition – On dit qu'une suite de nombres ou une variable x tend vers une limite s'il existe un nombre a telle que la différence $|x_n - a|$ reste absolument plus petite ou inférieure à une valeur ε quelconque : $|x_n - a| < \varepsilon$ pour $n > n_0$ et ε quelconque

On dit que $\lim x = a$ si ε étant un nombre quelconque s'il existe un nombre n de manière que $n > n_0$ $|x_n - a| < \varepsilon$

Alors la suite est convergente

Exemple

N° 1 $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots\ldots$

cette suite possède-t-elle une limite ?

Oui. Je dis que $\lim x = 0$

Prenons $\varepsilon = 0{,}00001 = 10^{-5}$

si $n_0 = 10^6$ $x_{n_0} = \frac{1}{10^6+1} < 10^{-5}$

↓

si $n > n_0$ $x_n < 10^{-5} = \varepsilon$

or x_n est la même chose que $|x_n - 0|$

donc 0 est la limite

N° 2

$x = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

Cette suite n'est pas convergente

Cependant on constate que x devient de plus en plus grand. On dit alors que

$$\lim x = \infty$$

N° 3

$x = -1, -2, -3 \ldots\ldots$ x devient de plus en plus petit.

Donc $\lim x = -\infty$

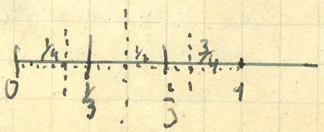
Il ne faut pas croire que toute suite puisse avoir une limite finie ou infinie

Ainsi le N° 5

$x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\ \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$

Cet ensemble est une suite.

Cette suite n'a pas de limite



On voit que si cette suite continue on voit que tous les points entre 0 et 1 sont remplis

Alors il n'y a pas ici de limite finie ou infinie

Envisageons maintenant le cas de
limite supérieure
limite inférieure

Dans l'exemple précédent on voit que lim inf = 0
et lim supér. = 1

<u>Important</u> - Ne pas confondre limites supérieure et inférieure avec bornes supérieure et inférieure

<u>Définitions</u> - Si une suite est supérieurement bornée, la limite supérieure est la borne inférieure d'~~un~~ tels nombres auxquels ~~auxqu~~ la suite finit par rester inférieurs

Dans l'exemple N° 5 on voit que 1 est la limite supérieure car si on prend un nombre plus grand que 1 ce nombre est supérieur à la suite. L'ensemble des points qui jouissent de cette propriété sont plus grand que 1. Donc 1 est la borne inférieure

On dit que $\lim \sup x = 1$
$\overline{\lim}\, x = 1$

On voit de même que $\lim \inf x = 0$
$\underline{\lim}\, x = 0$

Dans cet exemple les bornes inférieure et supérieure sont les mêmes que les limites inférieure et supérieure mais ceci n'est pas général

Exemple 7 $x = 5, 4, 3, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$
borne sup = 5
borne inf = 0

Cherchons la limite supérieure

Le nombre $1/2$ à partir du 6e rang reste supérieur aux valeurs suivantes de x.

La même chose a lieu pour $1/20$
Tous les points plus petits que $1/20$ jouissent aussi de cette propriété. Donc la limite supérieure est 0

De même la limite inférieure est 0
On peut constater ici que l'addition de nombres finis ne change pas les limites d'une suite. Les bornes cependant changent. Il en est de même pour la soustraction.

28-11-1933 On dit que $\lim x = a$ si après un certain rang on a $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$ x finit par rester constamment compris entre $a-\varepsilon$ et $a+\varepsilon$ ε étant un nombre quelconque

Ainsi si $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots \frac{1}{n}$

on a $\lim x = 0$. Cela ne veut pas dire que $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots \frac{1}{5} = 0$ seulement après un certain rang on a $x = 0$

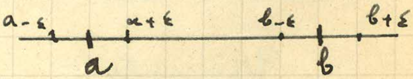
La limite ~~supérieure~~ supérieure de x est b lorsque $x < b+\varepsilon$ mais non $x < b-\varepsilon$ après un certain rang pour ε quelconque

La limite inférieure de x est a veut-dire que $x > a-\varepsilon$ mais pas $x > a+\varepsilon$ après un certain rang

Remarque

Si ~~on a~~: $\overline{\lim}\, x = b$ et $\underline{\lim}\, x = a$ et que $a = b$ alors $\lim x = a = b$ = limite déterminée de x.

Si $\overline{\lim}\, x = b$
on a : $x < b+\varepsilon$ et non $x < b-\varepsilon$



Si $\underline{\lim}\, x = a$
on a : $x > a-\varepsilon$ et non $a > a+\varepsilon$

Si $a = b$ on a : $\lim x = a = b$
Si $a \neq b$ on dit que x oscille entre $a-\varepsilon$ et $a+\varepsilon$ et $b-\varepsilon$ et $b+\varepsilon$
Si $a = b$ on peut dire que x est constamment entre $a-\varepsilon$ et $a+\varepsilon$ et donc $x \to a$ et $\lim x = a$

12 f

Remarque – Dans une suite il n'y a souvent qu'un seul nombre qui est près de la borne tandis qu'il y ~~en~~ a toujours une infinité de termes avoisinant la limite.

Ex : 5, 4, 3, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ … $\frac{1}{n}$ …

B. supérieure est 5 et il n'y a que le nombre 5 tout près de 5.

Lim inf. et lim sup. = 0 il y a une infinité de nombres avoisinant la limite déterminée

Théorème

Si la limite supérieure est égale à la limite inférieure, la variable a une limite déterminée qui est la valeur commune d's 2 limites

Opération sur les limites

1/ La limite d'une somme est la somme d's limites des termes
2/ Il en est de même pour la différence
3/ Limite d'un produit est égal au produit d's limites
4/ " " quotient est égal au q

$$\lim (x \pm y) = \lim x \pm \lim y$$
$$\lim (xy) = \lim x . \lim y$$
$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y} \quad \text{si} \quad \lim y \neq 0$$

a) Démonstration de 1

Posons $\lim x = a$ et $\lim y = b$
si on avance assez loin on a: $x = a + \alpha$ [α étant aussi petit que l'on veut en valeur absolue]
De même $y = b + \beta$

Il s'ensuit que: $x + y = a + b + (\alpha + \beta)$
ce qui démontre le théorème car si on avance aussi loin dans la somme $x + y$ cette somme ne diffère de ~~que~~ $(a+b)$ que de $(\alpha + \beta)$

Donc $x + y \longrightarrow a + b$

$$\lim (x+y) = a + b \quad \text{ou}$$
$$\lim (x+y) = \lim a + \lim b$$

4) Démonstration de 4. On a:

$$\frac{x}{y} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} \qquad \frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{b(a+\alpha) - a(b+\beta)}{b(b+\beta)} = \frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)}$$

ou $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)}$

le quotient $\frac{x}{y}$ ne diffère de $\frac{a}{b}$ que de $\frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)}$

Cette valeur est aussi petite que l'on veut pourvu que $b \neq 0$

Donc $\frac{x}{y} \longrightarrow \frac{a}{b}$

et $\lim \frac{x}{y} = \frac{a}{b} = \frac{\lim x}{\lim y}$

II Si $R(x)$ définit une fonction rationnelle de x
on a $\lim R(X) = R[\lim x]$

Ceci montre que l'on peut changer 2 opérations c'est-à-dire qu'au lieu de prendre la limite de R opéré sur x on peut le faire en opérant R après avoir trouvé la limite de x.

Ceci n'a lieu que pour les fonctions rationnelles.

Ceci n'a pas besoin d'être démontré car les opérations rationnelles ne comprennent que les 4 opérations.

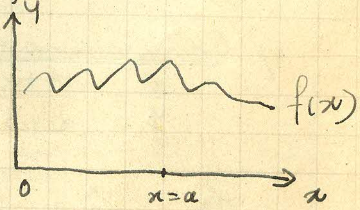
III si $y < x < z$ on a : $\lim y < \lim x < \lim z$

ceci est évident car :

aux limites on a $\lim y$ à gauche et $\lim z$ à droite

Ces propriétés s'appliquent aussi bien aux variables dépendantes et indépendantes

Par exemple : $y = f(x)$



Si par exemple $x = a$
et que nous posons que
$x \longrightarrow$ de 0 vers a
Pour toutes ces valeurs de x il y a une valeur de y. Alors sait-on
$\lim_{x \to a} y$?

On a pour $x = a$ $y = f(a)$

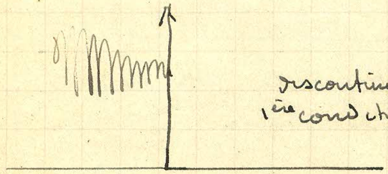
On peut d'ici arriver à la notion de fonction continue
Une fonction est continue si pour chaque valeur de x, on a que $\lim_{x \to a} y = f(a)$ quelque soit a.

15 Il y a ici 2 conditions:

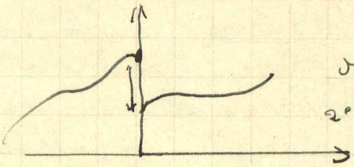
contenu = stetik
discontinue = unstetik

1° il faut que lim y existe
2° il faut que lim y = f(a)

Il peut arriver que y n'est pas une limite, comme il est possible que lim y existe mais lim y n'égale pas f(a)



discontinue car 1ère condition pas



discontinue car 2e condition pas

Voir GRANVILLE p. 15 N° 18

Quand on a: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ la fonction est continue et x tend vers a par valeurs croissantes. De même si $\lim_{a \leftarrow x} f(x) = f(a)$ la fonction est continue et x tend vers a par valeurs décroissantes.

Ces 2 égalités peuvent ne pas avoir lieu simultanément. Mais qu'en ceci n'a pas lieu ~~on~~ dit que $\lim_{x=a} f(x) = f(a)$

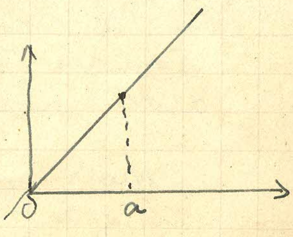
et on dit que la fonction est continu en a.

Pour dire qu'une fonction est continue de A à B il faut que pour chaque point intérieur à A et B il existe la relation $\lim_{x=a} f(x) = f(a)$

et pour A et B on suppose que la fonction est continue ~~de~~ droite de A et à gauche de B.

Exemples:

$f(x) = x$.



Soit un point a d'abscisse a et supposons $x \to a$

les valeurs f(x) étant identiques à x

il en sera de même à la limite quand x = a et alors f(a) =

ainsi la fonction est continue dans chaque intervalle et en tous points

Ce qui est vrai pour $f(x) = x$ est vrai aussi d'après les théorèmes pour les fonctions $f(x) = 2x$, $\varphi(x) = x + a$ et pour toutes les fonctions en x rationnelles

Alors :

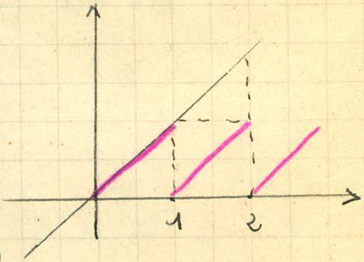
Théorème.

Une fonction rationnelle est continue si son dénominateur ne s'annule pas dans chaque intervalle.

Remarque : $[x]$ signifie les valeurs entières de x

Quand x a des valeurs irrationnelles ou fractionnaires $[x]$ signifie la partie entière de x.

Exemples. $x = \mp 4$, $[x] = \mp 4$
$x = 0$ $[x] = 0$
$x = 4\frac{1}{4}$ $[x] = 4$
$x = -3,03$ $[x] = -4$
$x = 0,05$ $[x] = 0$



Soit la fonction. $y = x - [x]$

Pour $0 < x < 1$ $[x] = 0$

En retranchant $[x]$ de x on a $y = 0$

Pour $1 < x < 2$ $[x] = 1$

mais en retranchant 1 de

2 on a les droites de la figure

et $y = x - [x]$ est appellé excès de x.

Cette fonction est continue dans les intervalles entre 2 nombres entiers

Tandis que par exemple si $x \to 2$ $f(x)$ croît alors on a : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$

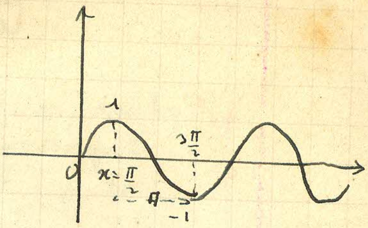
Mais pour $x = 2$ $f(x) = 2 - 2 = 0$ donc $\lim\limits_{x \to} f(x) \neq f(a)$

On voit que la 2e condition de continuité n'est pas réalisée. Ainsi la fonction est discontinue pour tous les nombres entiers

17

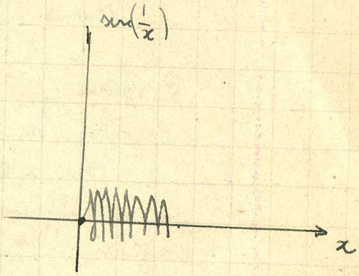
Soit la fonction : $y = \sin x$

Laissons la continuité de côté pour le moment



On peut constater que lorsque x varie de π la fonction varie de -1 à $+1$

Soit la fonction : $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$



cette fonction est discontinue pour $x = 0$

Remarquons que :

$|\sin x| \leq 1$ et $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1$

La borne supérieure de $\sin \frac{1}{x}$ est 1

Montrons aussi 1 est en même temps la limite supérieure.

Si $x = \frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{9\pi}, \frac{2}{13\pi} \dots$, $\sin\frac{1}{x} = 1$

Les valeurs de x s'approchent de 0. C'est une suite infinie de valeurs et cette suite tend vers 0. Pour toutes ces valeurs la fonction $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ égale toujours 1

Il s'ensuit que $\lim\limits_{0 \leftarrow x} f(x) = 1$

Or la borne inférieure des nombres plus grands que 1 est 1

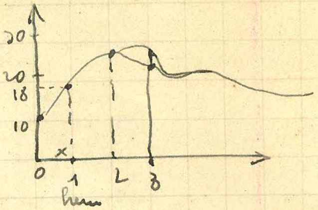
Donc $\lim f(x) = 1$

De même $\underline{\lim}_{0 \leftarrow x} = 0$

Il est très difficile de dessiner la fonction. On dit qu'elle a une oscillation égale à 2

Comme ceci a lieu la fonction n'a pas une limite déterminée et la fonction est discontinue pour $x = 0$

Calcul différentiel



Soit une fonction $y = f(x)$
supposons que x représente le temps
et y la longueur du chemin

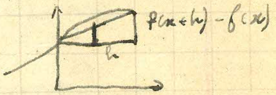
On voit que dans les intervalles
1 et 2   2 et 3   les chemins parcourus
décroissent. On dit que la vitesse a diminué.
Mais cette vitesse a diminué lentement.

Posons que le point $1 = x$ et l'intervalle 1 _ 2
égale h
On a en 1 : $y = f(x)$ et en $y_1 = f(x+h)$
La différence $f(x+h) - f(x)$ est déjà une certaine
valeur de la vitesse. Mais ceci dépend de h
si h est plus grand la vitesse change
Or nous savons que la vitesse égale le quotient
du chemin parcouru sur le temps
Dans le temps h, ~~la vitesse est~~ le chemin
est $f(x+h) - f(x)$ et alors la vitesse est

$$v = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ceci ne nous satisfait pas car nous voulons
avoir la vitesse en tout temps. Il faut
trouver une fonction de x. La fonction
précédente ne suffit pas car elle dépend
aussi de h.
Si nous étudions la fonction au voisinage
de x, il faut considérer les valeurs de h qui
tendent vers 0. Ainsi nous cherchons

$$\lim_{h=0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right]$$



Si h diminue indéfiniment la
fraction $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{0}{0}$

c'est-à-dire que le résultat est indéterminé
Dans le cas où ce quotient a une limite
déterminée, nous dirons que cette limite est
la dérivée de la fonction au point x.
et la fonction est **dérivable** au point x
On dit que $\lim_{h=0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] = f'(x)$

19

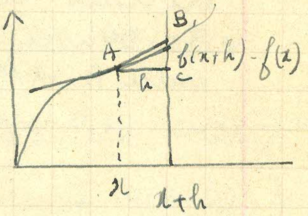
Exemple

Ainsi $f(x) = x$. $f(x+h) = x+h$.

alors $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = 1$

Donc pour $f(x) = x$, $f'(x) = 1$

Signification géométrique de la dérivée



Soit une courbe $f(x)$.
entre les deux points A et B dans le triangle ABC
on a: $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ = coeff angulaire de AB.

Quand h tend vers 0 c'est-à-dire que la sécante AB tourne autour de A de manière que B se rapproche indéfiniment de A
La sécante AB devient la tangente en A à la courbe et le rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ devient la dérivée de la fonction pour le point x.

Donc on peut dire que la dérivée pour une valeur x de la courbe (si cette dérivée existe) représente la pente ou coefficient angulaire de la tangente en ce point à la courbe

---

L'admission de l'existence de la dérivée entraîne 3 suppositions:

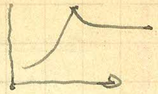
1) que $\lim_{h \to 0}$ existe

2) que $\lim_{0 \leftarrow h}$ existe

3) $\lim_{h \to 0} = \lim_{0 \leftarrow h}$

Il peut arriver que ces trois conditions ne soient pas réalisées simultanément.
Si la 1re est réalisée, on dit que la fonction a une dérivée à gauche.
De même il peut arriver qu'il y ait une dérivée à droite

De même le 3e cas peut ne pas exister



Dans ces trois cas la fonction n'est pas dérivable. Elle ne l'est que quand les 3 conditions sont réalisées simultanément

On dit qu'une fonction $f(x)$ est dérivable dans un intervalle A B, lorsque la dérivée existe en tous points compris entre A et B et qu'il

Une fonction dérivable pour le point x est continue en ce point

En effet $f'(x) =$ $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ a une limite déterminée pour $h=0$ c'est-à-dire que:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon$$

[ε est aussi petit qu'on veut)

Il s'ensuit que $f(x+h) - f(x) = h f'(x) + h\varepsilon$

Passons à la limite

$$\lim_{h=0} [f(x+h) - f(x)] = \lim_{h=0} [h f'(x) + h\varepsilon]$$

soit $\lim_{h=0} [f(x+h) - f(x)] = \lim h f'(x) + \lim h\varepsilon$

$$= \lim h . \lim f'(x) + \lim h . \lim \varepsilon$$

or $\lim h = 0$ et $\lim f'(x) = C^{te}$

Donc $\lim_{h=0} [f(x+h) - f(x)] = 0$

et donc la fonction est continue

Le théorème inverse n'est pas vrai et une fonction continue n'est pas toujours dérivable

Calcul de quelques dérivées

1 – Soit : $f(x) = u(x) + v(x)$

$u(x)$ et $v(x)$ étant dérivables.

on a :

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) + \varepsilon_1$$

$$\frac{v(x+h) - v(x)}{h} = v'(x) + \varepsilon_2$$

Or :

$$f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u(x+h) + v(x+h) - u(x) - v(x)}{h}$$

On voit que $\frac{u(x+h) + v(x+h) - u(x) - v(x)}{h} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$

Donc $\lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim u'(x) + v'(x) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) + \underbrace{\lim \varepsilon_1 + \lim \varepsilon_2}_{0}$$

ou $\underline{f'(x) = u'(x) + v'(x)}$

Il en est de même pour $f(x) = u(x) - v(x)$

En résumé si $f(x) = u(x) \pm v(x)$, $f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$

3 – soit $f(x) = u(x) \cdot v(x)$

donc $f(x+h) = u(x+h) \cdot v(x+h)$

mais $u(x+h) = u(x) + h\,u'(x) + h\varepsilon_1$

$v(x+h) = v(x) + h\,v'(x) + h\varepsilon_2$

Donc $f(x+h) = u(x)\,v(x) + h\,u(x)[v'(x) + \varepsilon_2] + h\,v(x)[u'(x) + \varepsilon_1]$
$+ h^2[u'(x) + \varepsilon_1][v'(x) + \varepsilon_2]$

en faisant $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ on a : $= u(x)[v'(x) + \varepsilon_2] + v(x)[u'(x) + \varepsilon_1] + h[\ldots]$

Passons à la limite. On a :

$$\underline{f'(x) = u(x)\,v'(x) + v(x)\,u'(x)}$$

car ε_2 et ε_1 tendent vers 0 et $h = 0$

3 - Dérivée de $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ $v(x) \neq 0$

Nous savons que $f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Nous supposons que : $u(x+h) - u(x) = h[u'(x) + \varepsilon_1]$

et $v(x+h) - v(x) = h[v'(x) + \varepsilon_2]$

et $f(x+h) - f(x) = \frac{u(x) + h[u'(x) + \varepsilon_1]}{v(x) + h[v'(x) + \varepsilon_2]} - \frac{u(x)}{v(x)}$

$= \frac{h[v(x)u'(x) + \varepsilon_1 v(x) - u(x)v'(x) - u(x)\varepsilon_2]}{v(x)[v(x) - h[v'(x) + \varepsilon_2]]}$

$\lim_{h=0} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{v(x)u'(x) + \varepsilon_1 v(x) - u(x)v'(x) - u(x)\varepsilon_2}{v(x)[v(x) - h[v'(x) + \varepsilon_2]}$

à la limite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, h = 0$. Donc si

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, $f'(x) = \boxed{\frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}}$

Exemple. Si $u = 1$ on a : $f(x) = \frac{1}{v(x)}$; $f'(x) = -\frac{v'}{v^2}$

---

4 -

Soient deux fonctions dérivables $u(x)$ et $v(x)$ c'est-à-dire que : $u'(x) = \lim_{h=0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$ de même p/ $v(x)$

Nous avons une fonction $y = u[v[x]]$ cherchons sa dérivée.

On a : $f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

On a : $v(x+h) = v(x) + \overbrace{h[v'(x) + \varepsilon_1]}^{h_1}$
$u(x+h) = u(x) + h[u'(x) + \varepsilon_2]$

D'autre part $f(x+h) = u[v(x+h)] = u[v(x) + h_1]$

Or si nous prenons $x = v(x)$ et pour h, h_1, on a

$f(x+h) = u[v(x) + h_1] = u[v(x)] + h_1[u'(x) + \varepsilon_2]$

En faisant $f(x+h) - f(x)$ on a :

$f(x+h) - f(x) = h_1[u'(x) + \varepsilon_2]$

et $f'(x) = \lim_{h=0} \frac{h_1 [u'v'(x) + \varepsilon_2]}{h} = \lim_{h=0} \frac{h[v'(x)+\varepsilon_1][u' v(x) + \varepsilon_2]}{h}$

~~Alors~~ en appliquant la règle des limites on a aussi que ε_1 et ε_2 tendent vers 0

Donc si $f(x) = u[v(x)]$, $f'(x) = \boxed{v'(x) \cdot u'[v(x)]}$

Exemples:

$f(x) = a$, $f'(x) = 0$
$f(x) = x$ $f'(x) = 1$
$f(x) = x + a$ $f'(x) = 1 + 0 = 1$
$f(x) = c.x$ $f'(x) = 0.x + c.1 = c$
$f(x) = x^2 = x.x$ $f'(x) = 1.x + x.1 = 2x$
$f(x) = a + bx + cx^2 \to f'(x) = b + 2cx$

$f(x) = x^n = x.x^{n-1}$, $f_n(x) = x^n = x\, f_{n-1}(x)$

en dérivant : $f'_n(x) = x\, f'_{(n-1)}(x) + f_{(n-1)}(x).1$

$$f'_n(x) = x\, f'_{(n-1)}(x) + x^{n-1} \quad (1)$$

Ceci est un raisonnement de récurrence car il permet de calculer une dérivée en fonction du rang et de la dérivée précédente

ainsi $f'_{(2)}(x) = 2x$; $f'_{(3)} = x.2x + x^2 = 3x^2 \ldots$

ainsi $f'_{(n)}(x) = nx^{n-1}$ (2)

Pour démontrer que cela est vrai montrons que l'égalité (2) remplit la relation (1)

On a: $f'_{(n)}(x) = x\, f'_{(n-1)}(x) + x^{n-1}$ d'après 1

d'après deux : $f'_{(n)}(x) = x\,(n-1)x^{n-2} + x^{n-1} = nx^{n-1}$

Donc $f'_n(x)$ égale bien nx^{n-1}

Conséquences

On peut trouver la dérivée des polynômes.

Ainsi $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 - a_n x^n$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \ldots\ldots + n a_n x^{n-2}$$

$$y = f(x) = \frac{a+x}{b+x} \qquad f'(x) = \frac{(b+x)\,1. - (a+x)\,1}{(b+x)^2} = \frac{b-a}{(b+x)^2}$$

calculons $f'(x)$ ~~sit~~ $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$

or $f'(x) = f'\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{-n-1}$

Or en dérivant directement x^{-n} on a
$f'(x) = -n x^{-n-1}$. On voit que la règle de dérivation est juste aussi bien pour les exposants entiers positifs que négatifs

---

Dans la formule de la dérivée :

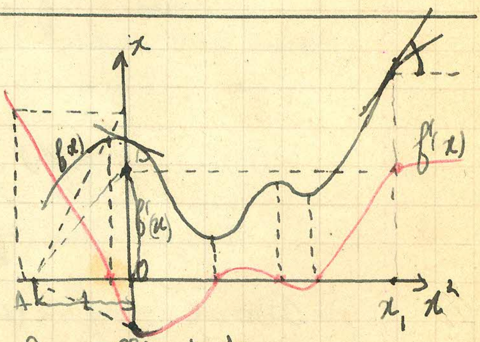
$$f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Posons que $h = \Delta x$ et $f(x+h) - f(x) = \Delta y$
$\Delta x =$ accroissement de la variable
$\Delta y =$ accroissement de la fonction

Alors $f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$

Soit une fonction dérivable $f(x)$ représentée par un certain graphique.

Trouver sans la calculer la representation graphique de la dérivée $f'(x)$



Nous pouvons connaître le coefficient angulaire de la tangente. Pour trouver la valeur de $f'(x)$ pour x_1 par exemple, Portons OA = 1 et menons par A une parallèle à la tangente. BO = $f'(x)$

Les fonctions élementaires et leurs Dérivées

exposants fractionnaires

Soit la fonction $f(x) = x^{\frac{1}{m}} = y$

La valeur $x^{\frac{1}{m}}$ représente la valeur de y solution de l'équation $y^m = x$

Nous supposerons $x > 0$ – Il faut démontrer qu'il y existe un nombre y rationnel ou irrationnel qui satisfasse à l'équation

Pour cela montrons que y^m represente une coupure.

écrivons $y = \sqrt[m]{x}$. Il est facile de montrer qu'il existe des nombres rationnels de puissance m plus petits que x et d'autres plus grand que x. Ainsi les nombres rationnels se divisent en 2 parties:

1/ les nombres rationnels de puissance m $< x$

2°/ " " " " " $> x$

Il faut montrer que les nombres de 1 soient plus petits que ceux de la 2e.

Il faut montrer aussi que cette classe (la 1ère) ne contient pas de nombre qui soit supérieur à tous les autres

Cette démonstration est identique à celle de la coupure que nous avons vue plus tôt

Donc il existe un nombre positif $y = \sqrt[m]{x}$

Si $y = x^{\frac{n}{m}} = (x^{\frac{1}{m}})^n$. Cette expression a une definition car $x^{\frac{1}{m}}$ l'a et x^n l'a aussi

Difficulté

Il est très difficile de trouver ce que signifie x^a où a est un exposant irrationnel. Il faut donner une nouvelle définition. Pour ceci considérons la suite:

$x^1, x^2, x^3 \dots$. Cette suite

n'a pas de limite si $x>1$

Nous pourrons dire que

$\lim x^n = \infty$

Cette suite augmente toujours.

C'est une série ou une suite **monotone**

[qui croît ou décroît toujours].

De même x^1, $x^{1/2}$ – $x^{1/3}$ – – –

est montone décroissante

et limite = 1.

$\lim x^{1/n} = 1$ pr $n = 1, 2, 3 - - - - -$

Formule du binome

$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$

$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$

$(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$

on peut connaître $(a+b)^n$ si on connait $\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$

Cherchons $(1+x)^n$ pour n entier

Considérons la fraction $C_{n,m} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)----(n-m+1)}{1.\ 2.\ 3.\ ---\ m}$

$= \binom{n}{m}$

On suppose $n \geq m$ car sinon $(n-m+1)$ ne serait pas entier.

Démontrons que: $(1+x)^n = 1 + C_{n,1}\,x + C_{n,2}\,x^2 ---- C_{n,n}x^n$

Exemple.

Si $n = 2$; $m = 0, 1, 2$. Si $m=1$

on a: $C_{n,1} = \frac{n}{1} = n$

Si $n = m$; $C_{n,n} = 1$

L'expression C_{nm} n'est pas définie pour $m=0$

En résumé on a: $n \geq m > 0$

Cherchons la somme $C_{n,m} + C_{n,m+1}$

$$C_{n,m} + C_{n,m+1} = \frac{n(n-1)\ ----\ (n-m+1)}{1.2\ ....\ m} + \frac{n(n-1)\ (---)\ --\ (n-m)}{1.2\ --\ (m+1)}$$

27

$$C_{n,m} + C_{n,m+1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots(m+1)}\left[(m+1)+n-m\right] = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots(m+1)}$$

$$C_{n,m} + C_{n,m+1} = C_{n+1,m+1}$$

Démonstration de $(1+x)^n \ldots\ldots$

ceci est vrai pour $n = 2$. car: p/ $n=2$, $m = 0, 1, 2$

Or $C_{n,1} = n$ et $C_{n,n} = 1$

$C_{2,0} = 1$, $C_{2,1} = 2$ $C_{2,2} = 1$

Montrons que si la relation $(1+x)^n = \ldots$ est vraie pour n elle est vraie pour $n+1$.

Or: $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) = \left(1 + C_{n,1}x + C_{n,2}x^2 \ldots C_{n,n}x^n\right)(1+x)$

$(1+x)^{n+1} = 1 + x(C_{n,1}+1) + x^2(C_{n,2}+C_{n,1}) + x^3(C_{n,3}+C_{n,2}) \ldots\ldots + x^n[C_{n,n}+C_{n,n-1}]$

Or nous avons montré que $C_{n,m} + C_{n,m+1} = C_{n+1,m+1}$

$(1+x)^{n+1} = 1 + x(C_{n,1}+1) + x^2 C_{n+1,2} + x^3 C_{n+1,3}$

Si nous supposons que $C_{n,m} + C_{n,m+1} = C_{n+1,m+1}$ est vraie pour $m=0$, $C_{n,0} + C_{n,1} = C_{n+1,1} = C_{n,1}+1$

Donc $(1+x)^{n+1} = 1 + x C_{n+1,1} + x^2 C_{n+1,2} \ldots$

c. q. f. d.

[Ce raisonnement est appelé induction complète]

La formule $(1+x)^n = 1 + C_{n,1}x + C_{n,2}x^2 \ldots C_{n,n}x^n$ due à Newton est donc vraie pour tous les n

Fonction exponentielle

$y = a^x$. Cette fonction est définie pour les valeurs de x rationnelles. Il s'agit de montrer qu'elle l'est aussi pour x irrationnel

En d'autres termes il faut montrer qu'il existe une coupure dans la ligne des nombres pour égale à a^x pour x irrationnel

x étant irrationnel, il existe une coupure pour x.

Prenons les valeurs rationnelles de x de la partie supérieure. Nous avons un ensemble de valeurs pour a^x

De même nous avons d'autres valeurs de a^x pour les x de la classe inférieure.

Nous possédons donc 2 classes : les a^x de la classe supérieure et les a^x de la classe inférieure

Il est évident que les valeurs de a^x de la Ière classe sont supérieures à la IIe

Ceci ne suffit pas encore pour montrer qu'il existe déjà une coupure de Dedekind car il peut y avoir encore des nombres entre les 2 classes.

Montrons que ceci ne peut pas avoir lieu c'est-à-dire qu'il existe un nombre de 1ère classe et 1 autre de IIe tel que leur différence soit aussi petite qu'on veut.

x étant irrationnel, nous savons que

$\alpha < x < \beta$ $\quad\quad \beta - \alpha = \varepsilon = \frac{1}{n}$ $\quad\quad \varepsilon$ étant aussi petit que l'on veut.

On a : $\quad a^\alpha < a^x < a^\beta$

or : $\quad a^\beta - a^\alpha = a^\alpha(a^{\beta-\alpha} - 1) = a^\alpha(a^{\frac{1}{n}} - 1)$

or l'expression $a^{\frac{1}{n}} - 1$ a pour limite 0 car $\lim a^{\frac{1}{n}} = 1$

Donc $\lim (a^\beta - a^\alpha) = 0$

et le théorème est démontré.

Donc a^x a une valeur bien déterminée pour x irrationnel.

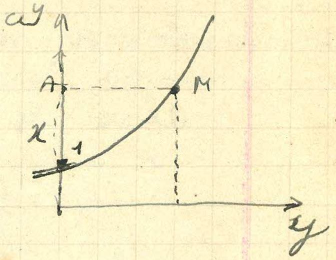
$y = \log_a x$

Soit la la fonction $y = \log_a x$ ou $a^y = x$

Il faut montrer que y a des valeurs réelles
[on suppose $a > 1$ et $x > 0$]

En d'autres termes il faut trouver une solution à $a^y = x$ et cette solution est unique

A cet effet considérons la fonction a^y. Nous avons vu que cette fonction est croissante monotone.



Pour résoudre l'équation, nous prenons une valeur de x et nous cherchons la valeur de y correspondante.

La parallèle AM ne rencontre la courbe qu'en un seul point car la fonction est croissante monotone.

Il existe donc une seule valeur de y. et la fonction $y = \log_a x$ est bien établie.

Logarithmes naturels

Nous connaissons les log. vulgaires ou de Brigg de base $a = 10$

En analyse on emploie les log. de base e.

Nombre e

Soit la suite infinie de valeurs: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pour $n = 1, 2, 3 \ldots\ldots$

Montrons que cette suite possède une limite déterminée e : $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

D'après la formule du binôme :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_{n,1}\frac{1}{n} + C_{n,2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 \dots C_{n,p}\left(\frac{1}{n}\right)^p \dots \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

Il y a dans cette suite $n+1$ termes
Le terme général $C_{n,p}\left(\frac{1}{n}\right)^p = A_p$ égale

$$A_p = \frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-p+1)}{1.2\dots\dots p}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^p = \frac{1}{1.2.3\dots p}\,1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)$$

[en divisant le numérateur par n]

si n augmente, les facteurs augmentent.

Alors les coefficient augmentent et le nombre de terms aussi, Donc la suite $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est monotone croissante

Il peut arriver deux cas:
1° La suite tend vers l'infini
2° Elle a une borne supérieure.

Montrons que ce 2e cas est vrai.

Dans $A_p = \frac{1}{1.2\dots p}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)$

Les facteurs du numérateur sont inférieurs à 1.

Donc: $A_p < \frac{1}{1.2\,3\dots p}$

Montrons que $\frac{1}{1.2.3\dots p} < \frac{1}{2^{p-1}}$

ou que $1.2\dots p > 2^{p-1}$
car il y a au moins $p-1$ de facteurs 2

Donc $A_p < \frac{1}{1.2\dots p} < \frac{1}{2^{p-1}}$

Et alors: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1}\dots\dots\frac{1}{2^{n-1}}$

Les terms du second membre qui sont en progression géométrique.

$$S = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

Donc $(1+\frac{1}{n})^n < 1 + 2\left[1-(\frac{1}{2})^n\right]$

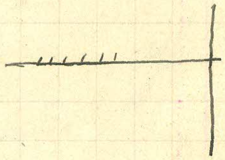
si n tend vers l'infini $(\frac{1}{2})^n$ tend vers 0

à la limite : $\lim (1+\frac{1}{n})^n < 3$

Donc 3 est la borne mais non la limite supérieure.

Théorème — Une suite de nombres monotonement croissante et supérieurement bornée a toujours une limite

Dans une suite pareille les nombres sont à gauche de la borne et la différence entre deux nombres consécutifs est positive.



La somme de ces différences est un nombre fini. Mais si une somme de différences en nombre infini tend vers un nombre fini il faut que chacune des différences tendent vers 0.

car si ces nombres ne tendaient pas vers 0, ils auraient une borne inférieure. Ils seraient supérieurs à un nombre et ils seraient supérieurs à la somme $\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \ldots\ldots$ qui représentent chacune des différences serait infinie.

Donc la différence entre 2 nombres consécutifs tend vers 0 et alors la suite tend vers une limite.

Donc $(1+\frac{1}{n})^n$ a une limite e

On calcule $e = 2,7182818$

e sert de base aux logarithmes naturels ou népériens

$\log_e x = \text{lognat}\, x = \ln x$

Dérivée de $y = f(x) = e^x$

Nous savons que $f'(x) = \lim_{h=0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h=0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h}$

e^x étant une constante par rapport h
on a :

$$f'(x) = e^x \lim_{h=0} \frac{e^h - 1}{h}$$

Posons $e^h - 1 = \frac{1}{a}$; $e^h = 1 + \frac{1}{a}$

Donc $h = \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right)$

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{1}{a \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right)} = \frac{1}{\ln\left[\left(1 + \frac{1}{a}\right)^a\right]}$$

Quand h tend vers 0, a tend vers l'infini

Donc il faut chercher la limite de
$\left(1 + \frac{1}{a}\right)^a$ pour $a = \infty$; on sait que c'est e

alors $\lim_{a=\infty} \frac{1}{\ln\left[\left(1 + \frac{1}{a}\right)^a\right]} = \frac{1}{\ln e} = 1$

cette démonstration se base sur le théorème suivant

Théorème

$$\lim_{a \to \infty} \left(1 + \frac{1}{a}\right)^a = e$$

Si a n'est pas entier on peut écrire $n < a < n+1$ n étant entier

Nous pous écrire :

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{a}\right)^a < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

les 2 expressions $\left(1 + \frac{1}{1+n}\right)^n$ et $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

tendent toutes les 2 vers e pour $n \infty$

car : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

on voit bien qu'à la limite

$$\left(1+\frac{1}{n}\right) \text{ et } \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-3} = 1$$

et ~~par~~ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ et $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

tendent vers e

Donc: $e < \lim_{a\to\infty} \left(1+\frac{1}{a}\right)^{a} < e$

il en résulte que: $\lim_{a\to\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a} = e$

Nous voyons bien que Si $y = e^x$, $y' = e^x$

ou $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$

Dérivée de $y = a^x$

Nous savons que: $\log a = \ln a$

ou $\ln a = \ln e \times \ln a$ [car $\ln e = 1$]

Donc $a = e^{\ln a}$; $a^x = e^{\ln a x}$

Nous savons que: si $f(x) = u[v(x)]$; $f'(x) = u'[v(x)]\,[v'(x)]$

or $u[v] = e^v$; $v = x \ln a$, $u'[v] = e^v$; $v' = \ln a$

Donc: $f'(x) = \ln a^{x \ln a}$

Donc $f'(x) = \ln a\, e^{x \ln a} = \ln a . a^x$

Si $a = e$; $f'(x) = 1 . e^x = e^x$

Dérivée de $y = \log_a x$

On a de même $a^y = x$

La fonction logarithmique est inverse de la fonction exponentielle car on change la place des 2 variables

On peut déduire d'une fonction et de sa dérivée, la dérivée de la fonction inverse.

Nous savons que $f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Si on change

Par exemple si $\begin{cases} y = f(x) \\ x = g(y) \end{cases}$ relations inverses

on a: $f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$g'(x) = \lim_{\Delta y = 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$

Si $f'(x)$ est différence de 0 on peut dire que:

~~on~~ $f'(x) = \frac{1}{g'(x)}$ et $g'(x) = \frac{1}{f'(x)}$

Donc pour deux fonctions inverses, leurs dérivées ~~réciproq~~ respectives sont inverses.

Donc cherchons la dérivée de $y = \log_a x$

ou $a^y = x$; on a que f' si $g = a^x$

$g'(x) = \ln a . a^y$

Donc: $f'(x) = \frac{1}{\ln a . a^y} = \frac{1}{\ln a} a^{-y}$

$f'(x) = \frac{1}{\ln a} a^{-\log_a x} = \frac{1}{x \ln a}$

et $\frac{d(\log_a x)}{dx} = \boxed{\frac{1}{x} . \frac{1}{\ln a}} = \boxed{\frac{1}{x} \log_a e}$

Dans les logarith. naturels

on a: $y = \ln x$ et $y' = \frac{1}{x}$

Dérivée de x^n

$y = x^n = e^{\ln x^n}$ Ici $v(x) = n\ln x$ et $u = e^v$

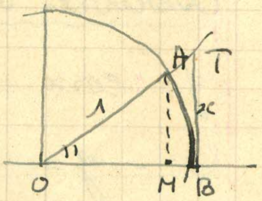
$f'(x) = e^v \cdot n\frac{1}{x} = n\, e^{n\ln x} \cdot \frac{1}{x} = n \frac{x^n}{x} = \boxed{n x^{n-1}}$

Ici n représente un nombre réel entier, fractionnaire ou irrationnel.

Dérivées des fonctions trigonométriques

Définitions de $\sin x, \cos x, \mathrm{tg}\, x, \mathrm{cotg}\, x$

Cercle de rayon 1.



~~Sin~~ x = longueur de l'arc x dans le cercle de rayon 1.

$\sin x = \frac{\overline{MA}}{1} = \overline{MA}$; $\overline{OM} = \cos x$; $\overline{BT} = \mathrm{tg}\, x$

Nous savons bien que $\sin x < x < \mathrm{tg}\, x$

Dérivée de $\sin x$

$$f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h=0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h=0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(\frac{h}{2} + x\right)}{h} = \lim_{h=0} \frac{\sin\frac{h}{2} \cos(x + \frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}$$

$$f'(x) = \lim_{h=0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos(x + \frac{h}{2})$$

Mais: ~~$\sin \frac{h}{}$~~ ~~Nous~~

Théorème : $\lim \frac{\sin x}{x}$ pour $x = 0$ $= 1$

En effet: $\sin x < x < \mathrm{tg}\, x$

Divisons par $\sin x$: $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

Quand $x = 0$ $\cos x = 1$ et $1 < \frac{x}{\sin x} < 1$

Donc $\lim_{x=0} \frac{x}{\sin x} = 1$ ou $\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Par suite : $\lim_{h=0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$

Donc $f'(x) = \cos x$ ou $\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$

Dérivée de $\cos x$

$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$y' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = u.v$

$u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $v = \frac{\pi}{2} - x$

$y' = u'v'$; $v' = -1$ et $u' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Donc $y' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$

Donc $\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$

Dérivée de $tg\,x$ et $cotg\,x$

$tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$; ~~$\frac{}{\cos}$~~

$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\cot g\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$; $f'(x) = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$$\frac{d(\operatorname{tg} x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

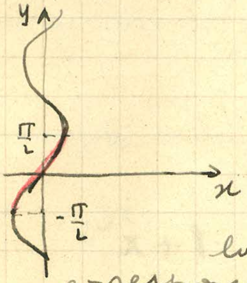
$$\frac{d(\cot g\, x)}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d(\sec x)}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d(\operatorname{cosec} x)}{dx} =$$

Dérivée de : $y = \arcsin x$ ou $x = \sin y$

Cette fonction est dite multiforme ou multivoque
mehrwertig ou mehrdeutig



Pour déterminer la dérivée il faut déterminer la branche principale de la fonction.

La branche principale de la fonction est la branche correspondante aux valeurs de $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
On peut voir que pour ces limites la fonction a pour une valeur de x une seule valeur de y. Elle est monotone

Quand on donne $y = \arcsin x$ on sous entend pour y $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

Calculons la dérivée de y

Appliquons la règle des fonctions inverses

On a : $x = \sin y$; $\dfrac{dx}{dy} = \cos y$

Par suite : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}$ car $[\sin y = x]$

ainsi pour toutes les branches de la fonction nous avons 2 valeurs de la dérivée.

Mais si nous considérons la branche principale, $\cos y$ est toujours positif

alors on a : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Alors : $\frac{d(\arcsin x)}{dx} = \frac{1}{|\sqrt{1-x^2}|}$

Dérivée de $y = \arccos x$:

$$y = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

$$y' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d(\arccos x)}{dx} = -\frac{1}{|\sqrt{1-x^2}|}$$

Dérivée de $y = \operatorname{arc\,tg} x$;

$$x = \operatorname{tg} y$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

Tableau des dérivées des fonctions élémentaires

$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = a^x \quad (e^x)$	$f'(x) = \ln a . a^x \quad (e^x)$
$f(x) = \log_a x \quad (\ln x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a} \quad (\frac{1}{x})$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = tg\, x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = cotg\, x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\lvert\sqrt{1-x^2}\rvert}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = \frac{-1}{\lvert\sqrt{1-x^2}\rvert}$
$f(x) = arctg\, x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = arc\,cotg\, x$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

---

exemples de dérivées de fonctions composées

1) $y = f(x) = \ln u_{(x)} \Rightarrow \frac{d(\ln u)}{dx} = \frac{u'}{u}$

$$y = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) \; ; \; y' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}}{x + \sqrt{a^2+x^2}}$$

$$y' = \frac{\sqrt{a^2+x^2} + x}{(\sqrt{a^2+x^2} + x)\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

2) $y = x^x$ ou mieux: $f(x) = [u_{(x)}]^{v(x)}$

$$f(x) = e^{\ln u . v} = e^z \qquad [z = \ln u \; v.]$$

$$f'(x) = e^z . z' \quad ; \quad z' = v . \frac{1}{u} . u' + v' \ln u$$

$$f'(x) = u^v \left[v \frac{u'}{u} + \ln u . v' \right]$$

Si $u = x$ et $v = x$; $f(x) = x^x$

$$f'(x) = x^x\left(x\frac{1}{x} + \ln x\right) = x^x(1+\ln x)$$

Dérivées d'un ordre supérieur

Soit la fonction, $f(x)$. Supposons qu'elle ait une dérivée $f'(x)$

Si la dérivée $f'(x)$ peut être dérivable on a alors $f''(x)$ comme dérivée seconde, et ainsi de suite jusqu'à la dérivée n^e et égale à : $f^{(n)}(x)$

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h=0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h}$$

La fonction qui a une dérivée n^e est dite infiniment dérivable (e^x, $\sin x$ -- par exemple)

Notation de Leibnitz pour les dérivées supérieures

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$$

$$f''(x) = \frac{df'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n f}{dx^n}$$

Exemples

1) $f(x) = x^n$; $f'(x) = nx^{n-1}$; $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2)\,x^{n-3}$$

$$f^{(m)}(x) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1)\,x^{n-m}$$

cette fonction est infiniment dérivable pour $n < 1$ et pas pour $n > 1$ car pour ce cas [$f''\ldots = 0$]

Donc pour n entier $\frac{d^n(x^n)}{dx^n} = n!$

2) $f(x) = \sin x$; $f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

et $f^{(m)}x = \sin(x + m\frac{\pi}{2})$

Si $m = 6$; $f^{(6)}x = \sin(x + 3\pi) = \sin(x + \pi)$

$f^{(6)}(x) = -\sin x$

3) $f(x) = \ln x$ $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f'' = -\frac{1}{x^2}$; $f''' = +\frac{2x}{x^4}$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$ ... $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{1}{x^n}$

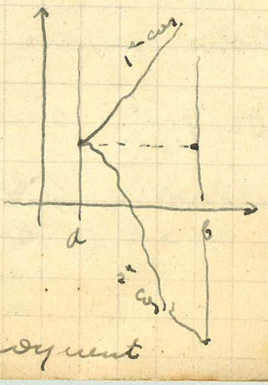
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{1}{x^n}$$

Formule de Taylor et ses applications

Soit $f(x)$ une fonction continue et dérivable dans un intervalle (a, b). Si nous supposons que dans tout l'intervalle (a, b) $f'(x) > 0$ il s'ensuit que $f(b) > f(a)$
de même si $f'(x) < 0$ $f(b) < f(a)$

Si $f(a) = f(b)$ il est impossible que $f'(x) \lessgtr 0$

Alors il faut que la fonction décroisse ou croisse et inversement avant d'arriver en B.



Si la fonction est continue et si elle passe de valeurs positives aux valeurs négatives et réciproquement

il faut qu'elle passe par 0. aussi quand $f(a) = f(b)$ il est nécessaire que la dérivée s'annule dans cet intervalle au moins une fois et il y aura pour cette valeur une tangente parallèle à Ox

ceci est le Théorème de Rolle: Une fonction continue ayant une dérivée dans un intervalle (a, b) et pour laquelle $f(a) = f(a)$ possède une dérivée qui s'annule au moins une fois.

<u>conséquence</u>.– Théorème de la moyenne ou d'accroissements finis

Considérons la fonction: $\varphi(x) = f(x) + (b-x)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Si $x = a$ on a: $\varphi(a) = f(a) + (b-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f(b)$

Si $x = b$ " " $\varphi(b) = f(b)$

on voit que $f(a) = f(b)$ ou $\varphi(a) = \varphi(b)$

Nous voyons qu'on peut appliquer le théorème de Rolle.

Par suite $\varphi'(x) = 0$ pour une valeur $a < x < b$ $(b > a)$

<u>Autre forme</u>: supposons $0 < \vartheta \leq 1$

alors $x = a + \vartheta(b-a)$

ce qui représente bien une valeur entre a et b.

Alors on a: $\varphi'(x) = \varphi'[a + \vartheta(b-a)] = 0$

Nous savons que, $\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

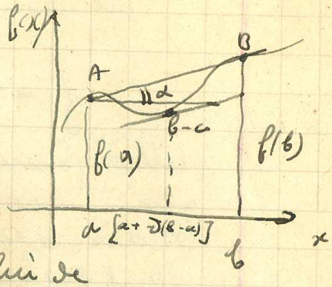
Or $\varphi'(x)$ s'annule pour $x = a + \vartheta(b-a)$

Alors: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'[a + \vartheta(b-a)]$

Signification géométrique

On voit bien que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = tg\alpha$

et $f'[a+\vartheta(b-a)]$ c'est le coefficient angulaire de la tangente



Donc il y a entre A et B une tangente dont le coefficient angulaire égale celui de la sécante AB.

Si l'on déplace AB parallèlement à elle même nous devons arriver au moins une fois à une position où AB est tangente à la courbe

Si $b-a=h$; alors $b=a+h$

et $f(a+h)-f(a) = h\, f'(a+\vartheta h)$

c'est sous cette forme que se présente le théorème des accroissements finis

Donc: L'accroissement d'une fonction dans un intervalle défini est égal à l'intervalle multiplié par une certaine valeur de la dérivée dans cet intervalle.

si $h=\Delta x$

$$\Delta f = \Delta x\, f'(a+\vartheta \Delta x)$$

La valeur de la dérivée étant entre a et Δx et Df et Δx étant limités, on peut comprendre alors la notation:

$$df = f'(a)\,dx$$

D'ailleurs: $f'(a+\vartheta\Delta x) = \frac{\Delta f}{\Delta x}$

en passant à la limite $\Delta x = 0$

on a: $f'(a) = \lim_{\Delta x} \frac{\Delta f}{\Delta x}$

Théorème de Taylor de 1er ordre

Calculons $f(a+h)$

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a+\theta h).$$

Cette formule est une formule d'approximation qui donne $f(a+h)$ connaissant $f(a)$ et h Mais approximativement car θ n'est pas toujours connu

Formule générale de Taylor.

Nous savons que :

(1) $(1+z)^n = C_{n,0} + C_{n,1} z + C_{n,2} z^2 \dots + C_{n,m} z^m + C_{n,n} z^n$

Mais $C_{n,0} = 1$ et $C_{n,n} = 1$

et $C_{n,m} = \binom{n}{m} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1.2.3.4\dots m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

Calculons $C_{n,n-m}$. $C_{n,n-m} = \dfrac{n!}{(n-m)!\,m!}$

Donc $C_{n,n-m} = C_{n,m}$

En multipliant (1) par a^n on a :

$$a^n[1+z]^n = (\underset{h}{a+az})^n = (a+h)^n = a^n + C_{n,1} a^{n-1} h + C_{n,2} a^{n-2} h^2 + \dots C_{n,m} a^{n-m} h^m \dots + h^n$$

$$(a+h)^n = a^n + C_{n,1} a^{n-1} h + C_{n,2} a^{n-2} h^2 \dots + C_{n,m} a^{n-m} h^m \dots + h^n$$

on peut considérer ceci comme une généralisation du théorème du binôme.

Appliquons le à la formule de Taylor.

Théorème de Taylor de 1er ordre

Calculons $f(a+h)$

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a + \theta h).$$

Cette formule est une formule d'approximation qui donne $f(a+h)$ connaissant $f(a)$ et h Mais approximativement car θ n'est pas toujours connu

---

Formule générale de Taylor.

Nous savons que:

$$(1) \quad (1+z)^n = C_{n,0} + C_{n,1} z + C_{n,2} z^2 - - - + C_{n,m} z^m - + C_{n,n} z^n$$

Mais $C_{n,0} = 1$ et $C_{n,n} = 1$

$$\text{et} \quad C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1.2.3.4\ldots m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Calculons $C_{n,n-m}$. $C_{n,n-m} = \dfrac{n!}{(n-m)!\, m!}$

$$\text{Donc} \quad C_{n,n-m} = C_{n,m}$$

En multipliant (1) par a^n on a:

$$a^n[1+z]^n = (a+az)^n = (a+h)^n = a^n + C_{n,1} a^{n-1} h + C_{n,2} a^{n-2} h^2 + \ldots C_{n,m} a^{n-m} h^m \ldots + h^n$$

(avec $az = h$)

$$(a+h)^n = a^n + C_{n,1} a^{n-1} h + C_{n,2} a^{n-2} h^2 \ldots + C_{n,m} a^{n-m} h^m \ldots + h^n$$

on peut considérer ceci comme une généralisation du théorème du binôme.

Appliquons le à la formule de Taylor.

45

Soit la fonction $f(x) = x^n$;

faisons $x = (a+h)$

On a: $f(a+h) = (a+h)^n$

Or $(a+h)^n = a^n + C_{n,1} a^{n-1} h \cdots + C_{n,m} a^{n-m} h^m \cdots + h^n$

Mais $a^n = f(a)$

$C_{n,1} a^{n-1} h = n a^{n-1} h = h . f'(a)$

$C_{n,2} a^{n-2} h^2 = \frac{n(n-1)}{1.2} h^2 . a^{n-2} = \frac{h^2}{1.2} f''(a) \ldots$

....

On a donc:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) \cdots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}_a \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}_a$$

Ceci c'est la formule de Taylor.

Elle est vraie pour x^n. Montrons qu'elle est vraie aussi pour $\alpha_n x^n$, α_n étant une constante

En examinant la formule nous voyons que le nombre n ne se trouve que dans le dernier terme

D'ailleurs la formule peut se continuer pour $f^{n+1} \ldots f^{(n+r)} \ldots$ car ces dérivées sont nulles

De même ceci est vrai pour toutes les valeurs plus petites que n.

Par exemple si $n=10$ nous aurons une certaine valeur de l'expression.

Si $n=2$, il n'y aura que trois termes. Cependant les autres étant nuls on peut dire que ~~valeurs po~~ la formule est aussi juste pour $n=10$ et pour $n<10$

En général, la formule est vraie pour

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_2 x^2 \text{-----} + \alpha_n x^n$$

cette formule n'est vraie que pour un polynôme. Tâchons de la rendre vraie pour une fonction.

Nous savons que pour une fonction :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) \text{------} + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + R_n$$

R_n est un terme inconnu correctif.

Si $f(x)$ est un polynôme nous savons que : $R_n = \frac{h^n}{n!} f^n(a)$

et maintenant nous chercherons ce qu'il faudra mettre pour R_n pour que $f(x)$ soit une fonction quelconque

si $R_n = \frac{h^n}{n!} M_n$, cherchons la valeur de M_n

Considérons la fonction :

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{b-x}{1!} f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) \text{.....} \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!} M_n$$

Cette fonction est continue car M_n est un nombre constant et elle a une dérivée

Si nous supposons $x=a$, on a

$$\varphi(a) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} + \dots$$

 Nous avons supposé $a+h=b$ donc $\varphi(a)=\varphi(b)$

Si $(x=b)$ on peut voir que $\varphi(b)=f(b)$ donc la fonction a la même valeur pour $x=a$ et $x=b$. D'après le théorème de Rolle, sa dérivée s'annulle au moins une fois.

Dérivons $\varphi(x)$

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(x) + \frac{b-x}{1!} f''(x) - \frac{2(b-x)}{2!} f''(x) + \dots$$

$$\dots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(x) - \frac{n(b-x)^{n-1}}{n!(n-1)!} Mn$$

Nihayet

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} \left[f^n(x) - Mn \right]$$

Rolle'i ~~Rolle d avo~~ Appliquons le théorème de Rolle : $x = a+\theta h \qquad 0<\theta<1$

$$Mn = f^n(a+\theta h)$$

On peut donc écrire

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^n(a+\theta h)$$

$\frac{h^n}{n!} f^n(a+\theta h)$ = écrit sous la forme de Lagrange

Cette formule est la formule de Taylor.

Si nous posons $x=a+h$. on a :

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) \dots \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}_a$$

$$+ \frac{(x-a)^n}{n!} f^n[a+\theta(x-a)]$$

Si $a=0$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(0) + \frac{x^n}{n!} f^n(\theta x)$$

C'est la formule de Maclaurin

La formule de Taylor peut s'écrire en faisant $x=0$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{h}{1} f'(x) \cdots \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{n}(x+\theta h)$$

Si nous posons $h = \Delta x$ (accroissement de x)
et " $f(x+h) - f(x) = \Delta f$ (" de $f(x)$)

on a : $$\Delta f = \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2} f''(x) \cdots + \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x) + \frac{(\Delta x)^n}{n!} f^{n}(x+\theta \Delta x)$$

On peut en s'aidant des formules de Taylor et de Maclaurin développer certaines fonctions en séries limitées.

<u>Exemples</u>

1) $f(x) = e^x = f'(x) = f''(x) \cdots = f^n(x)$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \left(\frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x)\right)$$

$$\frac{x^n}{n!} e^{\theta x}$$

Si nous posons $x = 1$

on a : $$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} e^{\theta}$$

Ceci peut servir à calculer e avec l'approximation que l'on veut.

Si $n=10$ par exemple et que nous négligions le reste.

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdots + \frac{1}{9!}$$

. Nous avons ici une erreur de $\frac{1}{n!} e^{\theta}$

qui plus petite que $\frac{1}{n!} e < \frac{3}{n!} < 10^{-6}$

Donc si $n=10$ et en négligeant le reste, on fait une erreur inférieure à 10^{-6}

Fo

Formule du binôme pour n quelconque

Appliquons la formule de Taylor

$$(x+h)^n = x^n + \frac{h}{1!} n \cdot x^{n-1} + \frac{h^2}{2!} n(n-1) x^{n-2} \cdots +$$

$$+ \frac{h^{m-1}}{(m-1)!} n(n-1) \cdots x^{n-(m-1)}$$

$$+ \frac{h^m}{m!} n(n-1) \cdots (n-m+1) \cdot (x+\theta h)^{n-m}$$

$$(x+h)^n = x^n + \binom{n}{1} h x^{n-1} + \binom{n}{2} h^2 x^{n-2} \cdots + \binom{n}{m-1} h^{m-1} x^{n-m+1} + \binom{n}{m} h^m (x+\theta h)^{n-m}$$

Si n est entier on voit que pour $n=m$, on arrive à la formule du binôme bien connue.

Si nous faisons $x=1$ et $h=x$ on a:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-m+2)}{(m-1)!} x^{m-1}$$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} x^m (1+\theta x)^{n-m}$$

Si nous posons $n = \frac{1}{2}$ on a: et $m=4$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\frac{1}{24} x^4 (1+\theta x)^{-7/2}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5}{128} x^4 (1+\theta x)^{-7/2}$$

Ceci est juste pour $x \neq -1$

On peut aussi calculer $\sqrt{1-x}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ .....

Calculons $\frac{1}{1+x}$ pour $m=4$

alors $n=-1$ on a: $\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + \frac{(-1)(-2)}{2!}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3$

$$+ \frac{(-1)(-2)(-3)(-4)}{4!} x^4 (1+\theta x)^{-1-4}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \frac{x^4}{(1+\theta x)^5}$$

De même $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\frac{x^4}{(1-\theta x)^5}$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \frac{x^8}{(1+\theta x^2)^5}$$

......

Gördükki $f(x)\, e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \dots + \frac{x^m}{m!} f^m(\theta x)$

Bundan $f(x) = e^{cx}$ bulunduktan. $f'(x) = c e^{cx}$; $f''(x) = c^2 e^{cx}$

$$e^{cx} = 1 + \frac{cx}{1!} + \frac{c^2x^2}{2!} + \frac{c^3x^3}{3!} \dots + \frac{c^m x^m}{n!} e^{\theta cx}$$

Pour calculer a^x considérons que $a^x = e^{x \ln a}$
on a:

$$a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x\ln a)^2}{2!} \dots + \frac{(x\ln a)^m}{m!} e^{\theta \ln a}$$

$f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ $\quad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x = \sin(x+\pi)$ $\quad f''(0) = 0$

$\dots$ $\quad f'''(0) = -1$

$f^n(x) = \quad = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ $\quad f^{2k}(0) = 0$

$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$

On a d'après Maclaurin

$$f(x) = \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{7!} + \dots + \frac{x^{(2k-1)}}{(2k-1)!}(-1)^{k-1} + \frac{x^{2k}}{2k!}(-1)^k \sin\theta x$$

Quand x est très petit on peut dire que $\sin x = x$

51

$f(x) = \cos x$
$f'(x) = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$
$f''(x) = -\cos x = \cos(x + \pi)$
$\vdots$

$f^{n}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$

$f(x) = 1$
$f'(0) = 0$
$f''(0) = -1$
$f'''(0) = 0$

$f^{(2k+1)}(0) = 0$
$f^{(2k)}(0) = (-)^{k}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \cdots \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}(-1)^{k-1} + \frac{x^{2k-1}}{(2k)!}(-1)^{k} \cos\theta x$$

$f(x) = \operatorname{tg} x$
Developper pour $n = 3$

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$f''(x) = 2\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg} x$
$f'''(x) = (1 + \operatorname{tg}^2 x)(6\operatorname{tg}^2 x + 1)$

$$\operatorname{tg} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!}(1 + \operatorname{tg}^2\theta x)(6\operatorname{tg}^2\theta x + 1)$$

Calculons l'erreur. on a: $\operatorname{tg}\theta x < \operatorname{tg} x$

si par exemple $x = \frac{1}{10}$

on a: $\frac{1}{10^3 3!}(1 + \operatorname{tg}^2\theta x)(6\operatorname{tg}^2\theta x + 1) < \frac{3}{10^3}$

On peut donc bien calculer $\operatorname{tg}\frac{1}{10}$ avec l'approximation voulue

52

$f(x) = \log(x)$

Dans la formule de Taylor posons $a = x = 0$ et $h = 1$ et appliquons la formule de Maclaurin.

calculons

$L(1+x)$ -

$y' = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$ $\qquad f'(0) = 1$

$y'' = -1(1+x)^{-2}$ $\qquad f''(0) = -1$

$y''' = +2(1+x)^{-3}$ $\qquad f'''(0) = 2$

.....

$y^{n} = (-1)^{n-1}(n-1)(1+x)^{-n}$

$$L(1+x) = x - \frac{x^2 \, 1!}{2!} + x^3 \frac{2!}{3!} \cdots + (-1)^{n-2} x^{n-1} \frac{(n-2)!}{(n-1)!} + (-1)^{n-1} x^{n} \frac{(n-1)!}{n! \, (1+\theta}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots\cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{(1+\theta x)^n} \cdot \frac{1}{n}$$

Nous pouvons de même developper $L(1-x)$, $L\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ...

$y = \text{arc tg } x \qquad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

Cette fonction est aussi $x = \text{tg } y$

On a: $y' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\text{tg}^2 y} = \cos^2 y$

$y'' = -2\cos y \sin y \cdot y' = -\sin 2y \cdot \cos^2 y$

$y''' = [-2\cos 2y \cdot \cos^2 y + \sin 2y \, 2\cos y \sin y] \, y'$

$y''' = [-2\cos 2y \cos^4 y + 2\sin 2y \sin y \cos^3 y]$

$y''' = -2\cos^3 y [-\sin 2y \sin y + \cos 2y \cos y]$

$y''' = -2\cos^3 y \cdot + \cos(2y+y) = -2\cos^3 y \cos 3y = \cos 3y \cdot \cos^3$

53 en calculant quelques autres dérivées on peut voir que

$$y^n = (-1)^{n-1}(n-1)! \cos^n y . \sin n\left[\frac{\pi}{2} - y\right]$$

quand $x = 0$ $y = 0$ aussi

$y' = 1$; $y'' = 0$; $y''' = -2$

et en général $y^{2p}(0) = 0$

$$y^{2p+1} = 2p!\,(-1)^p$$

Revenons maintenant la formule de MacLaurin

si x $= \theta x$ $y = \theta' y$

$$\text{arctg}\, x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!}.2 \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)}.2p!(-)^p + \frac{x^{2p+2}}{(2p+2)!}(2p+1)! \begin{matrix}\cos 2p+2\,\theta' y\\ \sin 2p\,\theta_4\end{matrix}$$

Le reste peut être ~~annulé ou maintenu~~ calculé, de 2 manières suivant que l'exposant est pair ou impair

$$\text{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} - (-1)^p \frac{x^{2p+2}}{2p+2} \begin{matrix}\cos^{2p+2} \theta' y\\ \sin 2p\theta' y\end{matrix}$$

si nous faisons ~~ons~~ $x = 1$, $\text{arctg}\, x = \frac{\pi}{4}$

et on a: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} +$

Trouvons que:

$$\text{arc tg}\,\alpha + \text{arc tg}\,\beta = \text{arc tg}\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma \qquad \Big| \quad \begin{array}{l}\alpha_1 = \text{tg}\,\gamma_1 \\ \beta_2 = \text{tg}\,\gamma_2\end{array}$$

calculons les tangentes

$$\text{tg}\,\gamma = \frac{\text{tg}\,\gamma_1 + \text{tg}\,\gamma_2}{1 - \text{tg}\,\gamma_1\,\text{tg}\,\gamma_2} = \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$$

$$\gamma = \text{arc tg}\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} = \text{arc tg}\,\alpha + \text{arc tg}\,\beta$$

Calculons α et β tel que $\text{arc tg}\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} = \frac{\pi}{4}$

ou $\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} = 1$

$\alpha+\beta = 1-\alpha\beta$ si $\alpha = \frac{1}{a}$ et $\beta = \frac{1}{b}$

on a: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 - \frac{1}{ab}$; $a+b = ab-1$

$1 = a(b-1) - b$; ~~il faut que a = 1~~

$\boxed{a = \frac{b+1}{b-1}}$ et $b-1 = 1$; $b = 2$

alors $\frac{\pi}{4} = \text{arc tg}\,\frac{1}{2} +$

Calculons $sh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ = sin hyperbolique

$ch\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. cos "

$th\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e + e^{-x}}$ tg "

La dérivée de $sh\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch\, x$

" " $ch\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh\, x$

en ajoutant $sh\, x + ch\, x = ch\, x + sh\, x = e^x$

calculons $ch\, x - sh\, x = e^{-x}$

En multipliant membre à membre on a:

$ch^2 x - sh^2 x = 1$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots + \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} e^{-\theta_1 x}$$

$$sh\, x = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} sh\, \theta_1 x$$

Applications de la formule de Taylor

1 – Formes indéterminées

La vraie valeur d'une fonction qui prend une forme indéterminée pour une valeur a de la variable indépendante est la limite (si elle existe) de la fonction pour cette valeur de la variable

Exemple

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$; pour $x=0$ on a

$$f(x) = \frac{0}{0}$$ forme indéterminée.

Nous savons que pour $x=0$ $\lim \frac{\sin x}{x} = 1$

donc la vraie valeur de $\frac{\sin x}{x}$ pour $x=0$ est 1

Règle de l'Hospital

Si pour $x=a$ les fonctions $f(x)=0$ et $\varphi(x)$ sont nulles et dérivables jusqu'à n. et si ces dérivées s'annulent aussi pour $x=a$ jusqu'à la $(n-1)$ième et si la $n$ième dérivée a une valeur déterminée

$$\lim_{a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f^{(n)}_{a}}{\varphi^{n}(a)}$$

Supposons $x=a+h$ quand x tend vers a h tend vers 0

D'après les conditions posées nous pouvons développer $f(x)$ et $\varphi(x)$ suivant la formule de Taylor

$$f(x) = f(a) + h' f'(a) + \dots \frac{h^n}{n!} f^{n}(a) + \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

$$\varphi(x) = \varphi(a) + h\, \varphi'(a) + \dots \frac{h^n}{n!} \varphi^{n}(a) + \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!} \varphi^{(n+1)}(a+\theta h)$$

D'après notre hypothèse toutes les dérivées jusqu'à la $(n+1)^e$ sont nulles.

Alors on a: $$f(x) = \frac{h^n}{n!} f^{n}(a) + \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

$$\varphi(x) = \frac{h^n}{n!} \varphi^{n}(a) + \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!} \varphi^{n+1}(a+\theta h)$$

57

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\frac{h^n}{n!} f^n(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(a+\theta h)}{\frac{h^n}{n!} \varphi^n(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \varphi^{n+1}(a+\theta' h)}$$

Divisons haut et bas par $\frac{h^n}{n!}$

on a: $$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f^n(a) + \frac{h}{n+1} f^{n+1}(a+\theta h)}{\varphi^n(a) + \frac{h}{n+1} \varphi^{n+1}(a+\theta' h)}$$

Quand x tend vers a h tend vers 0

alors: $$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f^n(a)}{\varphi^n(a)}$$

car puisque la dérivée n a une valeur finie et que les valeurs ajoutées tendent vers 0 la limite est bien $\frac{f^n(a)}{\varphi^n(a)}$

<u>Exemples</u>

1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Trouver la vraie valeur pour $x=0$.

D'après la règle de l'Hopital il suffit de prendre le rapport of dérivées de même ordre et non nulles.

Ici c'est bien la dérivée première

$$\lim_{x=0} f(x) = \left|\frac{\cos x}{1}\right|_{x=0} = 1$$

2°) $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}$

Vraie valeur pour $x=0$

Pour cette valeur on a: $f(x)_{x=0} = \frac{0}{0}$

58

D'après la règle de l'Hopital nous prendrons le rapport des dérivés seconds puisque les dérivés premières s'annulent aussi pour $x=0$

Donc : $\lim\limits_{x=0} f(x) = \lim\limits_{x=0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} = \left| \dfrac{(\cos x-1)''}{(x^2)''} \right|_{x=0}$

$= \left| -\dfrac{\cos x}{2} \right|_{x=0} = -\dfrac{1}{2}$

3°/ $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x^3}$

vraie pour $x=0$ car elle prend la forme $\dfrac{0}{0}$

Règle de l'Hopital

f^+ dérivées premières : $\dfrac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} = -\dfrac{1}{3x\sqrt{1-x^2}}$

Quand x tends vers 0 par valeurs inférieures $\lim\limits_{x=0} f(x) = +\infty$

Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures $\lim\limits_{x=0} f(x) = -\infty$

4° Remarque

La règle de l'Hopital peut s'appliquer aussi pour les cas suivants:

I) pour $x=0$ $\dfrac{f(a)}{\varphi(a)} = \dfrac{\infty}{\infty}$

posons: $f(x) = \dfrac{1}{F(x)}$

$\varphi(x) = \dfrac{1}{\Psi(x)}$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\frac{1}{j(x)}}{\frac{1}{\psi(x)}} = \frac{\psi(x)}{j(x)}$$

Pour $x=a$. $\frac{\psi(a)}{j(a)} = \frac{0}{0}$ qui est la forme précédente

II) si $x = a$ $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \frac{= 0}{= \infty}$; ou $f(x)\cdot\varphi(x) = 0.\infty$

Posons : $\varphi(x) = \frac{1}{g(x)}$ Quand $\varphi(x)$ est infini $g(x)$ est 0

on a : ~~$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$~~ $f(x) \cdot \varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

qui prend la forme $\frac{0}{0}$ pour $x=a$

III) pour $x=a$ $f(a) = \infty$; $\varphi(a) = \infty$

Trouvons $f(x) - \varphi(x)$ pour $x=a$

Posons : $f(x) = \frac{1}{j(x)}$; $\varphi(x) = \frac{1}{\psi(x)}$

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{1}{j(x)} - \frac{1}{\psi(x)} = \frac{\psi(x) - j(x)}{j(x)\ \psi(x)}$$

Pour $x=0$ $j(x) = 0$ et $\psi(x) = 0$

et la fonction prend bien la forme $\frac{0}{0}$

6°

Formes indéterminées de $y = u^v$

Prenons les log. des 2 membres : $Ly = vLu$

si $Ly = 0.\infty$ ou $\infty.0$

on a :

v	0	0	∞
u	∞	0	1

c'est à dire que u^v prend les formes :

$\infty^0 \quad 0^0 \quad 1^\infty$

On trouve la limite de Ly et on remonte ensuite au nombre.

<u>Remarque</u>

Dans quelques exemples ou problèmes il est préférables d'utiliser la forme de l'exemple.

Ainsi 1) trouver $\lim_{x=\infty} f(x)$ de $f(x) = \dfrac{x+a}{x-a}$

divisons par x : $f(x) = \dfrac{1 + \frac{a}{x}}{1 - \frac{a}{x}}$

pour $x = \infty$ on a $\dfrac{a}{x}$ et $-\dfrac{a}{x} = 0$

et $\lim_{x=0} f(x) = 1$

2°) $f(x) = \dfrac{x^n}{e^{ax}}$ dans laquelle $n>0$ $a>0$

trouver la vraie valeur pour $x = \infty$

Appliquons la règle de l'Hospital

$$\lim_{x=\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = \lim_{x=\infty} \frac{\frac{d^n}{dx^n} x^n}{\frac{d^n}{dx^n} e^{ax}} = \lim_{x=\infty} \frac{n!}{a^n e^{ax}} = 0$$

Il suffit de regarder la valeur de e^{ax}.

Exemples de formes indéterminées

1) $\frac{0}{0}$

a) vraie valeur de $y = \frac{\sin x}{1-\cos x}$ pour $x=0$

$$\lim_{x=0} y = \left|\frac{\cos x}{\sin x}\right|_{x=0} = \infty$$

Donc : quand x tend vers 0 par valeurs négatives : $-\infty$
" " " " " " " positives : $+\infty$

b) $y = \frac{\sin x}{L(1+x)}$ pour $x=0$

$$\lim_{x=0} y = \lim_{x=0} \frac{\cos x}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x=0} \cos x(1+x) = 1$$

c) $y = \frac{x^4 - x^3}{e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1}$ vraie valeur pour $x=0$

Elle prend la forme $\frac{0}{0}$

Rapport de dérivées premières : $\frac{4x^3 - 3x^2}{e^x - x - 1}$

prend la forme $\frac{0}{0}$ pour $x=0$

Rapport de dérivées 2e. $\frac{12x^2 - 6x}{e^x - 1}$; forme $\frac{0}{0}$ p/ $x=0$

Rapport de dérivées 3e : $\frac{24x - 6}{e^x} = -6$ p/ $x=0$

62 II $\frac{\infty}{\infty}$

a) $\frac{\text{Log}\,x}{\text{cotg}\,x}$ vraie valeur pour $x=0$

Forme : $\frac{\infty}{\infty}$

Règle de l'Hospital : $\frac{1}{x\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)} = -\frac{\sin^2 x}{x} = -\left(\frac{\sin x}{x}\right)\sin x$

p/ $x=0$ $-\left(\frac{\sin x}{x}\right)\sin x = 0$

Donc la vraie valeur est 0

б) $\frac{e^x}{\text{Log}^x}$ p/ $x = \infty$

$\frac{e^x}{\frac{1}{x}} = x\,e^x$ tend vers ∞ p/ $x=\infty$

c) $\frac{\text{tg}\,x}{\text{Log}(1+\text{tg}\,x)}$ vraie valeur p/ $x=\frac{\pi}{2}$

Forme $\frac{\infty}{\infty}$.

Rapp. des dérivées pr. $\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{1+\text{tg}\,x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}} = 1+\text{tg}\,x$

Donc vraie valeur est ∞

$+$ si x tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs

$-$ " " " " $\frac{\pi}{2}$ " "

63

III $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0$

a) $x \sin \frac{1}{x}$ p/ $x = \infty$

forme : $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0$

$$y = \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \cos \frac{1}{x} = 1 \text{ pour } x = \infty$$

b) $\left[\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right] x$ vraie valeur pour $x = +\infty$

forme : $0 \cdot \infty$

$$y = \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} \; ; \quad \text{Rapp. d. der. } \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{x^2}{1+x^2}$$

Nous avons 2 moyens:

1) Rapport d. dérív. sec. $\frac{-2x}{2x} = -1$

2) Divisons p/ x^2 : $\frac{-1}{\frac{1}{x^2}+1}$ prend la valeur -1 p/ $x = \infty$

c) $\operatorname{Log}[\operatorname{tg} x] \cdot \operatorname{tg} 2x$ p/ $x = \frac{\pi}{4}$

Forme : $0 \cdot \infty$.

$$y = \frac{\operatorname{Log}[\operatorname{tg} x]}{\frac{1}{\operatorname{tg} 2x}} \; ; \quad R = \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{2}{\cos^2 2x} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}}$$

$$R = -\sin 2x = -1 \text{ pour } x = \frac{\pi}{4}$$

IV $\infty - \infty$

a) $x - \text{Log}\, x$ pour $x = + \infty$

Mettons x en facteur : $x\left(1 - \frac{\text{Lg}\, x}{x}\right)$

trouvons la vraie de $\frac{Lx}{x}$ pour $x = \infty$

$$R = \frac{\frac{1}{x}}{x} = \frac{1}{x^2} = 0 \text{ pour } x = \infty$$

Donc vraie valeur est ∞

b) $e^x - x^2$ pour $x = +\infty$

Mettons e^x en facteur : $e^x\left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right)$

$\frac{x^2}{e^x}$ prend la valeur 0 pour $x = \infty$

et la vraie valeur est $+\infty$

V 0^0

a) $y = x^x$ pour $x = 0$

$$Ly = x\, Lx = \frac{\text{Lg}\, x}{\frac{1}{x}}$$

Prend la forme $\frac{\infty}{\infty}$ pour $x = 0$

Règle de l'Hop. $R = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x$

Donc $Ly = 0$ pour $x = 0$

alors $y = 1$

b) $y = (\text{tg}\, x)^{\sin x}$ pour $x = 0$

forme 0^0

65

$Ly = \sin x \, L\, tg x = \sin x \, L \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$= \sin x \, L \sin x - \sin x \, L \cos x$

Pour $x = 0$ $\quad \sin x \, L \cos x = 0$

$\sin x \, L \sin x = \dfrac{L \sin x}{\dfrac{1}{\sin x}}$; $\dfrac{\dfrac{1}{\sin x}}{1}$

VI – 1^{∞}

$y = (1 + \sin x)^{\cot g x}$ pour $x = 0$

$Ly = \cot g x \, L(1 + \sin x)$

$= L(1+\sin x) \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cos x \cdot \dfrac{L(1+\sin x)}{\sin x}$

$R = \dfrac{\dfrac{\cos x}{1+\sin x}}{\cos x} = \dfrac{1}{1+\sin x} = 1$ pour $x=0$

$Ly = 1$ pour $x = 0$

et $y = e$

VII. – ∞^0

$y = (\cot g x)^{\sin x}$ $\quad x = 0$

$Ly = \sin x \, L \cot g x = \sin x \, L \cos x - \sin x \, L \sin x$

$\sin x \, L \cos x = 0$ pour $x = 0$

de même

Remarque

Reprenons la formule de Taylor :

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a) \ldots\ldots + \frac{h^n}{n!} f^n(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

Si la fonction $f(x)$ possède $(n+1)$ dérivées dans l'intervalle $a+h$ a le dernier terme de la formule de Taylor peut se mettre sous la forme :

$$\frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left[f^{(n+1)}(a) + \varepsilon\right]$$

Minimums et maximums

Définition : si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle a, b et si c est une valeur de x comprise entre a et b et si x tend vers c de telle manière que $f(c) > f(c+h)$ la fonction possède un maximum qui est c

On définit de même le minimum d'une fonction. A cet effet il suffit de changer le signe de l'inégalité précédente.

Si la fonction $f(x)$ possède un maximum ou un minimum et si pour la valeur c de ce maximum ou ce minimum la fonction possède une dérivée $f'(x)$ on a $f'(c) = 0$

soit : $\dfrac{f(c-h) - f(c)}{-h}$ et $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$

pour $h > 0$. Le premier rapport est positif. Il en est de même du second. quand $h < 0$

67

On a souvent à chercher la limite d'expressions telles que

$$A = u^v$$

d/s lesquelles u tend vers 1 et v augmente indéfiniment

On écrit :

$$u^v = (1+u-1)^v = \left[(1+u-1)^{\frac{1}{u-1}}\right]^{(u-1)v}$$

Le crochet tend vers e ; le produit $(u-1)v$ qui se présente sous la forme $0 \times \infty$ tend vers une limite λ ; on a $\lim A = e^{\lambda}$

Appl.

$$\lim y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} \quad \text{pour } x = \frac{\pi}{4}$$

On cherche

$$\lim z = (\operatorname{tg} x - 1)\operatorname{tg} 2x = -2\frac{\operatorname{tg}(x)}{1+\operatorname{tg} x}, \quad \lim z = -1$$

$$\lim y = \frac{1}{e}$$

GARTI

-20-

Elektroteknik

2inci Defter

Temami Tefazuli Hesap

Calcul différentiel et Intégral

Prof. Von Mises

(Suite)

Inversement. Si dans l'intervalle (a, b) pour une valeur de $x = c$ $(a < c < b)$ la dérivée a une racine $f'(x) = 0$, pour prendre en considération le cas général si la première dérivée ne s'annulant pas pour $x = c$ et étant continue est de degré n; $x \neq c$ la formule de Taylor donne:

$$f(c+h) - f(c) = \frac{h^n}{n!} f^n(c+\theta h) \quad 0 < \theta < 1$$

D'après la remarque précédente cette différence peut s'écrire

$$f(c+h) - f(c) = \frac{h^n}{n!} \left[f^n(c) + \varepsilon \right]$$

Puisque $\varepsilon \to 0$ si $h \to 0$ on peut choisir pour un telle intervalle $c - \varphi \,|\, c + \varphi$ que $|\varepsilon| < |f^n(c)|$

Alors $|f^n(c) + \varepsilon|$ dépend comme signe de $f^{(n)}(c)$

alors $f(c+h) - f(c)$ [n étant +] a le même signe que $h^n f^n(c)$

On peut considérer les deux cas suivants

1°/ $n = 2p$ [n est pair] – alors si h est positif ou négatif h^n est toujours

Le signe de $f(c+h) - f(c)$ ne dépend plus que de celui de $f^n(c)$

1) si $f^{(n)}(c) > 0$ $\quad h^n f^n(c) > 0$

et $f(c+h) - f(c) > 0$

soit $f(c+h) > f(c)$
c correspond à un minimum

2) si $f^n(c) < 0$ $\quad f(c+h) < f(c)$

et (c) correspond à un maximum

3) $n = 2p+1$ -- Le signe de h^n dépend du signe de h et il n'a pas autour de c un signe constant. Alors c ne correspond ni à un minimum ni à un maximum.

En Résumé

Pour qu'un nombre c puisse correspondre à un minimum ou à un maximum la condition nécessaire et suffisante est que la première dérivée qui ne s'annule pas pour $x = c$ soit d'un degré pair.

Recherche du maximum ou du minimum d'une fonction

Soit la fonction $f(x)$ nous cherchons les extrêmes de $f(x)$ c'est-à-dire les valeurs de x correspondantes aux minimum ou maximum.

Nous avons vu que ces points sont les points pour lesquels $f'(x)$ s'annule. car d'ailleurs pour $f'(x) > 0$ $f(x)$ croît
" $f'(x) < 0$ " décroît.

Soit $f'(x) = 0$ pour $x = a$

D'après la formule de Taylor

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) \ldots \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\theta h)$$

Pour $x = a$ on a :

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) \ldots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

or $f'(x) = f'(a) = 0$ donc $hf'(a)$ s'annule. Il reste d'autres termes qui peuvent aussi s'annuler.

Nous supposons que jusqu'à $f^{(n)}$ toutes les dérivées s'annulent.

$$f'(a) = f''(a) = f'''(a) = \ldots = f^{n}(a) = 0$$

On a donc : $f(a+h) - f(a) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)$

Or nous avons supposé que pour un extrême tel que $x = a$, la valeur de $f(x)$ est ou ~~supérieure~~ supérieure ou inférieure à cet extrême.

Ainsi pour h aussi petit qu'on veut $f(a+h) - f(a)$ doit être positif ou négatif. Quand h tend vers 0 ou $|h| < \varepsilon$ il faut donc que h^{n+1} ait un signe constant ce qui a lieu si $n+1$ est un nombre pair.

Ainsi comme nous l'avons vu si la première dérivée qui ne s'annule pas ~~pour~~ $x = a$ est d'un degré pair ~~la~~ différence $f(a+h) - f(a)$ ~~est~~ un signe constant.

Donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction ait un maximum ou un minimum ~~est que~~ pour une valeur de $x = a$ ~~est~~ la première dérivée qui ne s'annule pas pour $x = a$ soit d'un degré pair

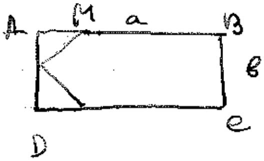
Ainsi pour les points $x=0, 2\pi, 4\pi$ — —
nous avons des minimums
Recherchons les autres. a cet effet il faut trouver $f'''(x)$ car $f''(x)=0$
$f'''(x) = -4\sin x - 8\sin 2x$ qui s'annule pour $x=\pi, 3\pi, 5\pi$ - - -

Il faut chercher la 4ᵉ dérivée :

$f^{IV} = -4\cos x - 16\cos 2x$ qui ne s'annule jamais et toujours <0 donc les points sont des max.
Ainsi la 1ère dérivée qui ne s'annule pas est une dérivée du 4ᵉ ordre. Donc tous ces points sont extrêmes
Ainsi $f(x)$ a les mêmes extrêmes que $\cos x$

Quel est le rectangle d'aire maximum ~~inscrit dans un rectangle~~ et de périmètre donné.

Soit $2l$ le périmètre



Donc : $a+b+a+b = 2l$; $l=a+b$

Soit $AM = x$; $b = l - x$

$f(x) = x(l-x)$; $f'(x) = l - 2x = 0$ pour $x = \frac{l}{2}$

et $f''(x) = -2$ négative donc $x=\frac{l}{2}$ est un maximum ; donc : $a = b = \frac{l}{2}$

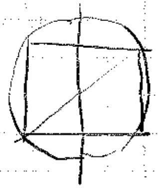
$$f = \frac{l^2}{4},$$

Donc c'est le carré de côté : $\frac{l}{2}$.

On peut énoncer ceci d'une autre manière

Le produit de 2 facteurs dont la somme est constante est maximum lorsque ces facteurs sont égaux.

Quel est le rectangle maximum inscrit dans un cercle de rayon donné -



Soit x et y les côtés ;

$$x^2+y^2 = 4R^2;$$

$$f(x) = S = xy = x\sqrt{4R^2-x^2}$$

$$f'(x) = \sqrt{4R^2-x^2} + \frac{-x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{4R^2-x^2-x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}} = \frac{4R^2-2x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x = R\sqrt{2}$$

$$f''(x) =$$

Existe-t-il un nombre égal à son logarithme

$$x = \log_a x$$

Soit la fonction : $f(x) = x - \log_a x$

Nous savons qu'en général $f(x) > 0$ car $x > \log_a x$

Pour $f(x)$ s'annule, il faut que $f(x)$

minimum sort négatif. Alors $f(x)$ peut s'annuler.

$$f(x) = x - \log_a x$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}\log_a e$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2}\log_a e$$

$f' = 0$ pour $x = \log_a e$

$$f_{extr}(x) = \log_a e - \log_a(\log_a e)$$

Cherchons quand $f(x)$ est négatif.

$$\log_a e - \log_a(\log_a e) < 0$$

Comme la fonction logarithmique est monotone croissante on peut écrire

$$e - \log_a e < 0$$

$$e < \log_a e$$

$$a^e < e$$

$$\boxed{a < e^{\frac{1}{e}}}$$

Donc pour les bases $a < e^{\frac{1}{e}} \approx 1,44$ il existe un nombre égal à son logarithme ~~ment~~

Nombres complexes.

On appelle ~~un~~ nombre complexe, la composition de 2 nombres réels.

Dans cette théorie il faut tenir compte du rang et ainsi:

$$2;5 \neq 5;2$$

Pour faire ressortir le rang on la pair on le désigne par:

$$a+bi$$

Le symbole n'a pas une définition par lui-même mais il sert à définir un nombre complexe

Règles pour les nombres complexes.

1) Pour que: $a+bi = a'+b'i$ il faut que $a=a'$ et $bi=b'i$ ou $b=b'$

2°) $a+0i = a$

3) $0+bi = bi$

4) $1.i = i$

5) $(a+bi)+(a'+b'i) = (a+a')+(b+b')i$

par définition.

6) $(a+bi)(a'+b'i) = (aa'-bb')+(ab'+a'b)i$

par définition

si $a=a'=0$ et $b=b'=1$ on a:

$$ii = -1 \quad ; \quad \boxed{i^2=-1} \quad ; \quad i = \sqrt{-1}$$

Toutes les autres propriétés de l'addition, ~~sous~~ multipl. division des nombres ordinaires, s'appliquent aussi aux nombres complexes

Montrons que nous pouvons faire la soustraction et la division des nombres complexes ~~sans~~ avec les 6 règles énoncées au début

Soit la différence: $(a+bi)-(a'+b'i) = x+iy$

Or d'après les lois de l'addition si c, c', c'' … sont des nombres complexes:

$$c+c' = c'+c \quad \text{et} \ (c+c')+c'' = c+(c'+c'')$$

D'après les lois de la multiplication:

$$c.c' = c'.c$$
$$c(a+b) = ca+cb$$

Or la différence est définie par le nombre qui ajouté au nombre retranché reproduit le premier:

$$(x+iy) + (a'+b'i) = a+bi$$

d'après la règle 5:

$$(x+a') + (y+b')i = a+bi$$

D'après la règle 1) on doit avoir:

$$x+a' = a \quad ; \quad x = a-a'$$
$$y+b' = b \quad ; \quad y = b-b'$$

et le résultat est:

$$(a+bi)-(a'+b'i) = (a-a') + (b-b')i$$

Soit la division: $\frac{a'+b'i}{a+bi} = x+iy$

Par définition on a:

$$(x+iy)(a+bi) = a'+b'i$$

D'après la règle (6) le premier membre peut s'écrire:

$$(ax-by)+(bx+ay)i$$

et on a: $(ax-by)+(bx+ay)i = a'+b'i$

D'après la règle (1) on doit avoir:

$$a' = ax-by \quad \text{et} \quad b' = bx+ay$$

on a: $x = \frac{a'a+bb'}{a^2+b^2}$ et $y = \frac{ab'-a'b}{a^2+b^2}$

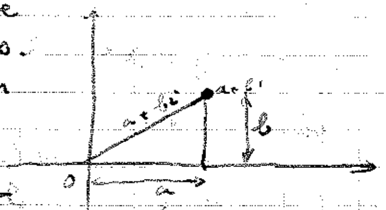
et on a: (8) $\frac{a'+b'i}{a+bi} = \frac{a'a+bb'}{a^2+b^2} + i\,\frac{ab'-a'b}{a^2+b^2}$

Représentation des nombres complexes

Les nombres réels se représentent par un axe où on a choisi une origine et chaque point de la ligne est un nombre réel.

Pour représenter les nombres réels on emploie un système de coordonnées cartésiennes.

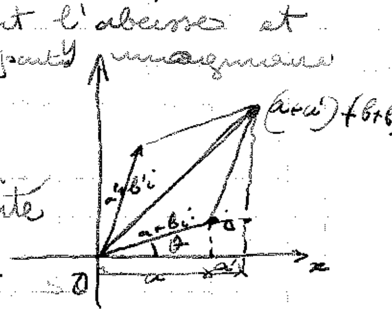
Tous les points du plan de 2 coordonnées du plan complexe sont des nombres complexes. –



Un tel nombre peut se représenter aussi par

un vecteur. — La partie réelle est l'abcisse et l'ordonnée est le coefficient de la partie imaginaire

Somme de 2 nombres complexes:



c'est le point obtenu en menant par l'extrémité d'un des vecteurs $a+bi$ un vecteur équipollent à l'autre.

C'est aussi la résultante vectorielle des vecteurs $c = a+bi$ et $c' = a'+b'i$.

[Dans la notation $c = a+bi$
a = partie réelle et bi = partie imaginaire]
L'axe des x est dit réel
" " y " " imaginaire

— De même on peut indiquer la position du point c par ses coordonnées polaires: $\overline{Oc} = r$ et $\widehat{Ox, Oc} = \theta$

On a $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$

$$r = \left|\sqrt{a^2+b^2}\right| \quad \text{et} \quad \theta = \text{arc tg}\,\frac{b}{a}$$

on prend r toujours positif.

θ et r déterminent aussi un nombre complexe:

$$c = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

$$\underline{c = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

r est appelé le <u>module</u> du nombre complexe et θ <u>l'argument</u>

Ainsi un nombre complexe différent de 0 a un module positif r et un argument θ égal à $2k\pi$ à a près:

[a = premier angle] $\theta = a + 2k\pi$.

Produit de deux nombres complexes.

Soient : $c = a+bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
$c' = a'+b'i = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$$cc' = (a+bi)(a'+b'i) = rr'[\cos\theta\cos\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') - i^2\sin\theta\sin\theta']$$

Comme $i^2 = -1$, on a :

$$cc' = rr'[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')]$$

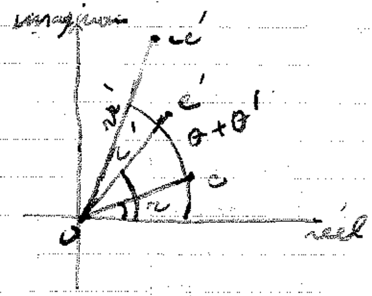
Le module de cc' est rr' car $[\cos^2(\theta+\theta') + \sin^2(\theta+\theta')] = 1$

et l'argument de cc' est : $\theta + \theta'$

Représentation :

vecteur cc' : mod : rr'

arg. $\theta + \theta'$



Exemples

Si $c = c'$ on a $\text{mod}(c^2) = (\text{mod } c)^2$.
$\arg(c^2) = 2\arg c$

[si c est un nombre réel, c^2 est aussi un nombre réel car son argument est 0]

Si $c = bi$, nombre imaginaire (pas de partie réel)

$b > 0$ arg bi $= \frac{\pi}{2}$; arg $b^2 = \pi$

et aussi pour $b > 0$ le carré de $c^2 = (bi)$ est un nombre réel positif –

[si $b = 1$ on a $i^2 = -1$]

si $b<0$. l'argument de c est $-\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$

Le carré de c a pour argument : $-\pi$ ou 3π
ce qui donne l'axe réel négatif

Ainsi : le carré d'un nombre imaginaire est un nombre réel négatif

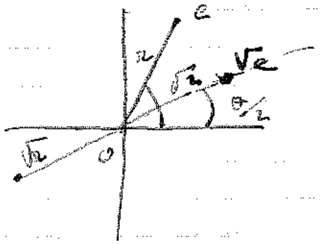
De même : la racine carré d'un nombre négatif est un nombre imaginaire.

<u>Racine carrée d'un nombre complexe</u>

nous savons que : $\text{mod}(c^2) = (\text{mod } c)^2$
$\arg(c^2) = 2 \arg c$

De là : $\text{mod } \sqrt{c} = |\sqrt{\text{mod } c}|$
$\arg \sqrt{c} = \frac{1}{2} \arg c$

appris $\text{mod } \sqrt{c}$ a 2 valeurs,
On trouve donc pour $\sqrt{c}$ deux nombres complexes.



Soit l'équation du second degré $x^2 = a$
nous savons que pour a positif
il y a une solution pour x : $x = \pm\sqrt{a}$
Seulement si a est négatif on peut trouver une solution par les imaginaires.
Si par exemple $a = -2$

$$x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}\, i$$

on peut trouver la représentation graphique

<u>nous pouvons donc résoudre par les imaginaires les équations du second degré n'ayant pas de racines réelles.</u>

Les imaginaires servent aussi à donner une solution à toutes les équations.

Théorème de d'Alembert

Toute équation algébrique a des racines exprimées par des nombres complexes.

La démonstration de ce théorème doit être laissée au cours d'algèbre supérieure. Nous le démontrerons tout de même d'une manière restreinte.

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe

et une équation :

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \cdots + a_n z^n = 0$$

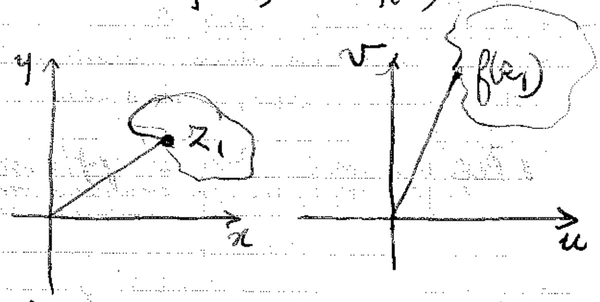
Le théorème de d'Alembert dit que même pour les a imaginaires, il y a une solution.

La fonction $f(z)$ sera évidemment en général complexe.

et $f(z) = u + iv$

Maintenant demandons nous comme construire la représentation graphique d'une fonction complexe d'une variable complexe

Pour une valeur z_1 de la variable indépendante nous avons une certaine valeur $f(z_1)$ de $f(z)$

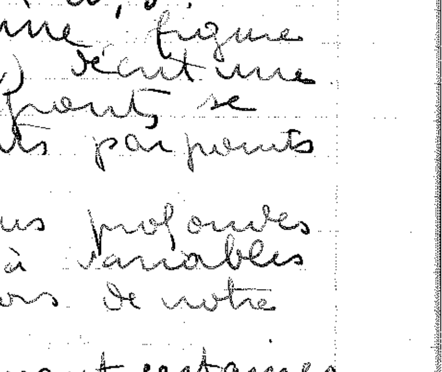


Ainsi à chaque point du plan x, y il y a un point correspondant dans le plan u, v.
et si z_1 décrit une figure quelconque, $f(z_1)$ décrit une courbe dont les points se correspondent points par points

Des données plus profondes sur les fonctions à variables complexes sont hors de notre cours.

Considérons maintenant certaines propriétés de la fonction $f(z)$

1°) <u>Continuité</u>. -



Lorsque z_1 vient d'une position à une autre en restant sur une courbe, $f(z_1)$ vient à la point correspondant d'une manière continue, c'est-à-dire en restant sur une courbe.

Ainsi par exemple si z_1 glisse sur une droite, le point correspondant glisse sur une courbe.

Si z_1 décrit un cercle autour de z_1

$f(z_1)$ décrit aussi une figure fermée car le cercle rencontre la droite D en 2 points ; par suite la courbe correspondante au cercle rencontre aussi la courbe (C) en 2 points. Il en est de même pour toutes les droites et courbes passant par z_i et $f(z_1)$. Aussi la courbe décrite par $f(z_1)$ est fermée.

D'autre part il existe toujours sur cette courbe un point plus rapproché de 0 que $f(z_1)$ c'est-à-dire que le module est inférieur à celui de $f(z_1)$ et il en est de même pour le point z_1

Donc si pour z_1 $\quad f(z_1) \neq 0$

il existe toujours z_2 tel que

$$\text{mod } f(z_2) < \text{mod } f(z_1)$$

$$|f(z_2)| < |f(z_1)|$$

2°) Considérons ce fait que dans un triangle un côté est supérieur à la ~~somme~~ différ. des 2 autres et inférieur à leur somme

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$|a+b| \geq \big| |a| - |b| \big|$$

Appliquons ceci à notre fonction.

$$f(z) = (a_0 + a_1 z \dots + a_{n-1} z^{n-1}) + a_n z^n$$

On a: $\quad |f(z)| \geq \big| |a_n z^n| - |a_0 + a_1 z \dots a_{n-1} z^{n-1}| \big|$

Soit A une valeur réelle positive

qui surpasse la valeur absolue de chacun des coefficients a_0 $a_1 \dots a_{n-1}$

Supposons que $|z| > 1$; dans ce cas chaque puissance de z est supérieure à $|z|$

Chacune des expressions $a_0 + a_1 z + \dots a_{n-1} z^{n-1}$ est surpassée par $A|z|$

Par suite $(a_0 + a_1 z - \dots + a_{n-1} z^{n-1}) < nA z^{n-1}$

On a aussi : $|a_n z^n| = |a_n| |z|^n$

On a : $|f(z)| > \left| |a_n| |z|^n - nA |z^{n-1}| \right|$

$$|f(z)| > |z|^{n-1} \left| |a_n| |z| - nA \right|$$

Si j'augmente $|z|$ le second membre augmente et il en sera de même de $|f(z)|$

Ainsi si on me donne un nombre ~~donné~~ M, je puis toujours trouver une valeur de z telle que $f(z)$ soit supérieure à M

Nous avons donc les deux propriétés :

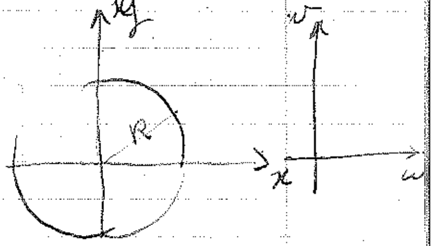
1) $|f(z_2)| < f(z_1)$

2) $f(z) > M$

Reprenons la démonstration du théorème de d'Alembert.

Nous devons montrer qu'il existe au moins une valeur de z telle que $f(z) = 0$

Supposons $z = 0$; $f(0) = a_0$
La valeur qui correspond au minimum de $f(z)$ étant (z_1)
$[f(z_1) \neq 0]$
nous devons chercher ce minimum à l'intérieur du cercle de rayon R. –
car on peut prendre $|a_0| = M$



Nous avons démontré que si $f(z_1)$ est la valeur minimum de $f(z)$, il existe toujours $|f(z_2)| < f(z_1)$ ce qui montre qu'il y a contradiction. –

Cette contradiction vient de la supposition que le min de $f(z)$ est différent de 0 ; pour lever la contradiction, il faut donc que ce minimum soit 0 ; Ainsi il y a une valeur de z pour laquelle $f(z)$ est nulle. – c'est-à-dire que le polynôme $f(z)$ possède au moins une racine. –

Soit $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots a_0$

Nous avons vu que $\left|f(z)\right|_{min} = 0$

si $z = z_1$ une valeur quelconque,

$$\frac{f(z)}{z-z_1} = \frac{a_n z^n \dots}{z-z_1} = f_1(z) + \frac{r}{z-z_1} \quad (r = cte)$$

Or $f_1(z) = a_n z^{n-1} \dots$

on a : $f(z) = (z-z_1) f_1(z) + r$

Supposons que z_1 est une racine de $f(z)$
Dans ce cas $r = 0$
Dans ce cas : $f(z) = (z-z_1) f_1(z)$

Si z_1 est une racine, il existe le polynôme $f_1(z)$ de degré $n-1$; d'après le théorème de d'Alembert, $f_1(z)$ possède au moins une racine ; soit z_2 cette racine en appliquant la démonstration précédente nous pouvons écrire :

$$f_1(z) = (z-z_2) f_2(z)$$

En continuant on a :

$$f(z) = (z-z_1)(z-z_2) \dots (z-z_n) a_n$$

Ainsi :

On peut écrire un polynôme $f(z)$ sous la forme d'un produit de facteurs $z-z_i$ par un nombre constant.

En d'autres termes, un polynôme de degré n possède n racines ou plus précisément peut être décomposé en n facteurs du 1er degré [car il peut se faire que les racines soient égales]. Par exemple: $z^2-2z+1=0$ a pour racines $z=1$ mais $f(z)=(z-1)(z-1)$; on dit dans ce cas que 1 est une racine double ou du 2e degré. Aussi on peut écrire:

$$f(z)=a_n(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}\dots(z-z_k)^{m_k}$$

On a évidemment: $m_1+m_2 \dots + m_k = n$

Différentiation de fonctions complexes

Soit $f(x) = u + iv$ [x est une variable réelle]

Par définition:

$f'(x) = u' + iv'$

Nous pouvons regarder x comme une variable complexe à la condition de donner une définition de la dérivée d'une variable complexe. Ceci est hors de la portée de notre cours.

Seulement nous considérons cette seule formule: si $f(z) = z^m$, $f'(z) = mz^{m-1}$ conforme à celle de la différentiation des fonctions réelles.

Ainsi nous accepterons comme vraies les règles de différentiation d'une somme, d'une différence...

Appliquons ceci aux considérations suivantes.

Soit un polynôme $f(z)$ de degré n

$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots a_0$

Nous avons que:

$f'(z) = a_n \, n \, z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} \cdots$

Supposons que $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$

Par définition $f'(z) = \dfrac{Q(z) P'(z) - P(z) Q'(z)}{Q^2(z)}$

D'autre part $P(z)$ et $Q(z)$ n'ont pas évidemment de racines communes car si cela était on pourrait toujours les supprimer.-

En nous appuyant sur le théorème de d'Alembert nous pouvons dire que $P(z)$ possède au moins une racine. Soit $z = a$ cette valeur pour laquelle $P(z) = 0$ $[Q(a) \neq 0]$

Si $P(z) = 0$, pour $z = a$, il en est de $f(z)$

Donc si $f(z)$ est une fonction rationnelle de (z) si a est une racine de $P(z)$ cette valeur est également une racine $f(z)$.-

Théorème

Si a est une racine d'une fonction $f(z)$, de degré m, a est aussi une racine de $f'(z)$ de degré $m-1$

D'après les considérations précédentes nous pouvons écrire:

$$f(z) = (z-a)\,\varphi(z)$$ ou d'une manière plus général si a est une racine du degré m :

$$f(z) = \underline{(z-a)^m}\,\varphi(z)$$

Il est évident que $\varphi(z)$ ne contient pas le facteur $z-a$ car dans ce cas nous pourrions toujours augmenter le degré de a jusqu'à ce que $\varphi(z)$ ne contiennent plus ~~$\varphi(z)$~~ $z-a$ -
Ainsi $\varphi(a) \neq 0$

Dérivons $f(z)$:

$$f'(z) = (z-a)^m \varphi'(z) + m(z-a)^{m-1}\varphi(z)$$

$$f'(z) = \underline{(z-a)^{m-1}}\,[\,(z-a)\,\varphi'(z) + m\,\varphi(z)]$$

c.q.f.d.

<u>Conséquences</u>

1 - si a est une racine simple de $f(z)$
$f'(a) \neq 0$ -
Donc:
si a est une racine simple de $f(z)$
a n'est pas une racine de $f'(z)$

II.- Si a est une racine de degré m de $f(z)$, a est une racine

de $m-1$	de f'
$m-2$	de f''
$m-3$	de f'''
⋮	
1	de $f^{(m-1)}$

Donc si a est une racine de m^e degré de $f(z)$ ce nombre a est une racine commune à $f(z)$ et à toutes les dérivées $m-1$ de $f(z)$.

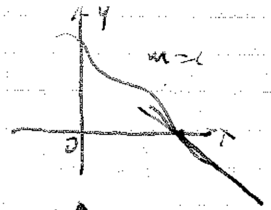
$$f(a)=0 \;,\; f'(a)=0 \;, \ldots\ldots \; f^{m-1}(a)=0$$

Toutes ces propriétés sont vraies pour toutes les fonctions rationnelles d'une variable complexe.

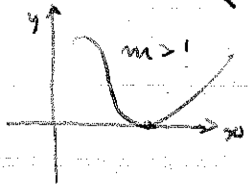
Nous pouvons considérer aussi ces propriétés pour une fonction réelle (rationnelle ou non) d'une variable réelle.

1) cas d'une racine simple.

$$f(a)=0 \quad f'(a)\neq 0$$



2) Cas d'une racine multiple



$$f(a)=0 \;;\; f'(a)=0 \ldots$$

Pour trouver le degré d'une racine il faudra se servir du théorème de Taylor.

Auparavant appliquons le théorème de Taylor à une fonction rationnelle d'une variable ~~réelle~~ complexe

Soit $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$

Étudions la différence :

$$\varphi(z) = f(z) - \left[f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{1}{2}(z-a)^2 f''(a) \dots + \frac{1}{(m-1)!}(z-a)^{m-1} f^{m-1}(a) \right]$$

Or pour $z=a$, $\varphi(z) = 0$; donc la fonction $\varphi(z)$ possède la racine a. – Quel est le degré de cette racine ? À cet effet il faut examiner $\varphi'(z)$ qui suivant qu'elle est nulle ou non pour $x=a$; a.t une racine double ou simple.

$$\varphi'(z) = f'(z) - \left[0 + f'(a) + \frac{1}{1}(z-a) f''(a) \dots + (z-a) \dots \right]$$

Tous les termes après le 1er de la quantité entre crochets contiennent une puissance de $z-a$ –
Donc pour $z=a$

on a : $\varphi'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$

Donc a est au moins une racine double – Calculons $\varphi''(z)$.

$$\varphi''(z) = f''(z) - \left[0 + 0 + f''(a) + (z-a) \right]$$

qui s'annule aussi pour $z=a$

On pourrait voir ainsi que toutes les dérivées $(m-1)$ de $f(z)$ s'annulent pour $z=a$

D'ailleurs directement :

$$\varphi^{m-1}(z) = f^{m-1}(z) - \left[\frac{1}{(m-1)!}(m-1)! \, f^{m-1}(a) \right]$$

qui s'annule bien pour $z=a$]

Donc $\varphi(z)$ admet (a) ~~comme~~ comme m^e racine de m degré ; puisque les $(m-1)$ dérivées de $\varphi(z)$ s'annulent pour $z=a$

Donc : $\varphi(z) = (z-a)^m \varphi_1(z)$ [$\varphi_1(z)$ est évidemment une fonction rationnelle]

$\varphi(z)$ a pour dénominateur $Q(z)$ car $f(z)$ a pour dénominateur $Q(z)$ et l'expression entre crochets n'a pas de dénominateur qui contiennent la variable. Si $\varphi(z)$ a pour dénominateur $Q(z)$ il en est de même $\varphi_1(z)$

Ainsi : $\varphi(z) = \frac{(z-a)^m}{m!} A_m$

On a donc :

$$f(z) = f(a) + \frac{1}{1}(z-a) f'(a) + \frac{1}{2!}(z-a)^2 f''(a) \cdots + \frac{1}{(m-1)!}(z-a)^{m-1} f^{(m-1)}(a) + \frac{1}{m!}(z-a)^m A_m$$

Cette formule se rapproche de la formule de Taylor dans le cas d'une variable réelle. Seulement le polynôme A_m n'est pas déterminé.

Dans le cas d'une variable réelle nous savons que :

$$A_m = f^m[a + \theta(z-a)] ; \quad |\theta| < 1$$

Nous ne pouvons pas dire la même chose pour z complexe.

Seulement nous démontrerons le théorème suivant qui est vrai aussi bien pour z complexe que réelle :

$$\lim_{z=a} A_m(z) = f^m(a)$$

Écrivons la formule ~~pour~~ de Taylor pour $m+1$ facteurs:

$$f(z) = f^r(a) \cdots \frac{1}{(m-1)!}(z-a)^{m-1} f^{m-1}(a) + \frac{1}{m!}(z-a)^m f^m(a)$$
$$+ \frac{1}{(m+1)!}(z-a)^{m+1} A_{m+1}$$

En égalant les deux valeurs de $f(z)$ et en supprimant les termes identiques on a:

$$\frac{1}{m!}(z-a)^m A_m = \frac{1}{m!}(z-a)^m f^m(a) + \frac{1}{(m+1)!}(z-a)^{m+1} A_{m+1}$$

multiplions par $m!$ et divisons par $(z-a)^m$

on a: $A_m = f^m(a) + \frac{1}{m+1}(z-a) A_{m+1}$

$$\lim_{z=a} A_m = f^m(a)$$

Nous pouvons donc dire que l'expression trouvée pour $f(z)$ est la formule de Taylor pour (z) complexe; le polynôme A_m est a pour limite pour $z=a$ $f^m(a)$

Décomposition d'une fraction rationnelle

Soit le quotient $\frac{P(x)}{Q(x)}$ qui est une fonction rationnelle — c'est une fraction proprement dite si le degré du dénominateur

est supérieur à celui du numérateur

Toutes les autres fractions sont dites fractions générales ou fractions qui ne sont pas des fractions proprement dites

Toute fraction générale peut être réduite à la somme d'un entier et d'une fraction proprement dite

$$\frac{x^2-3}{x^2+5} = 1 + \frac{-8}{x^2+5}$$

La somme de 2 fractions proprement dites est une fraction proprement dite

soit : $\frac{P_\alpha(x)}{Q_\beta(x)} + \frac{P_\gamma(x)}{Q_\delta(x)} = \frac{P_\alpha Q_\delta + P_\gamma Q_\beta}{Q_\beta Q_\delta}$

tels que $\alpha < \beta$ $\gamma < \delta$

le degré du dénominateur est $\beta + \delta$

Le degré de $P_\alpha Q_\delta$ est $\alpha + \delta < \beta + \delta$

car $\beta > \alpha$

de même $\gamma + \beta < \beta + \delta$ car $\gamma < \delta$

ainsi le degré du numérateur est plus petit que celui du dénominateur Donc la somme est une fraction proprement dite. Il en est de même de la différence. –

Fraction simple. – C'est une fraction dont le numérateur est une constante et le dénominateur une fonction entière de x : $\frac{cte}{(x-a)^k}$

Chaque fraction rationnelle m. dite peut être décomposée en la somme d'un polynôme et d'une suite de fractions simples.

Soit $f_1(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. (degré de Q > que celui de P)

D'après le théorème de d'Alembert nous avons au moins une racine pour $Q(z)$. Soit a cette racine, on a :

$$Q(z) = (z-a)^{\alpha}\, Q_1(z)$$

Développons suivant la formule de Taylor : $\frac{P(z)}{Q_1(z)}$

$$\frac{P(z)}{Q_1(z)} = A_0 + (z-a)A_1 + (z-a)^2 A_2 \cdots (z-a)^{\alpha-1} A_{\alpha-1} + M(z-a)^{\alpha}$$

M est une fonction de (z)

A sont des cte

Divisons par $(z-a)^{\alpha}$:

$$\frac{P(z)}{(z-a)^{\alpha}\, Q_1(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A_0}{(z-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(z-a)^{\alpha-1}} \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{z-a} + M$$

Ainsi nous avons décomposé

$\frac{P(z)}{Q(z)}$ en une somme de fractions simples et une fonction M ;

Or M est une fraction proprement

dite au M égale les coeff. de la fraction proprement dites —

Or le dénominateur de M est $\varphi_1(z)$

On a donc : $M_\alpha = \dfrac{P_1(z)}{\varphi_1(z)}$; seulement le degré de $\varphi_1(z)$ est supérieur à celui de $P_1(z)$

Si nous recommençons la démonstration pour la fraction $\dfrac{P_1(z)}{\varphi_1(z)}$

on a : $\varphi_1(z) = (z-b)^\beta \varphi_2(z)$

$$\frac{P_1}{\varphi_1(z)} = \frac{B_0}{(z-b)^\beta} + \frac{B_1}{(z-b)^{\beta-1}} \cdots + \frac{B_{\beta-1}}{z-b} + M_\beta$$

On peut continuer ainsi pour M_β et arriver à M_γ, M_δ ....

Or nous savons que :

$$\varphi(z) = (z-a)^\alpha (z-b)^\beta (z-c)^\gamma \cdots (z-l)^\lambda . K,$$

Si nous avons de la manière précédente trouvé tous les M jusqu'à l'avant dernière racine, le dernier $\varphi(z)$ est :

$K.(z-l)^\lambda$ et le dernier M est :

$$\frac{P_l}{K.(z-l)^\lambda};$$

En décomposant P_ℓ par la formule de Taylor on a :

$$\frac{P_\ell}{K.(z-\ell)^\lambda} = \frac{L_0 + L_1(z-\ell) + L_2(z-\ell)^2 \cdots + L_{\lambda-1}(z-\ell)^{\lambda-1}}{K.\ (z-\ell)^\lambda}$$

ou : $\frac{P_\ell}{K.(z-\ell)^\lambda} = \frac{1}{K}\left[\frac{L_0}{(z-\ell)^\lambda} + \frac{L_1}{(z-\ell)^{\lambda-1}} + \cdots \frac{L_{\lambda-1}}{z-\ell}\right]$

Nous pouvons donc écrire la formule générale

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A_0}{(z-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(z-a)^{\alpha-1}} \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{z-a}$$

$$+ \frac{B_0}{(z-b)^\beta} + \frac{B_1}{(z-b)^{\beta-1}} \cdots + \frac{B_{\beta-1}}{z-b}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{L_0}{(z-\ell)^\lambda} + \frac{L_1}{(z-\ell)^{\lambda-1}} \cdots + \frac{L_{\lambda-1}}{z-\ell}$$

Pour trouver les coefficients A_0, A_1 ...

On a bien : $\frac{P(z)}{Q_1(z)} = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 \cdots$

Soit $A(z) = (z-a)^\alpha \cdot \frac{P(z)}{Q(z)}$ par identification

$A_0 = A(a)$; $A_1 = A'(a)$, $A_2 = \frac{1}{2!} A''(a) \cdots$

De même $B(z) = (z-b)^2 \frac{P(z)}{Q(z)} \dots$

$$B_0 = B(b) \quad ; B_1 = B'(b) \quad B_k = \frac{1}{2!} B''(b)$$

Exemple

$$f(z) = \frac{z^5 + z^4 - 2z^3 + 2z^2 + 5}{(z^2-1)^2}$$

Comme ce n'est pas une fraction proprement dite, il faut effectuer la division

$$f(z) = z + 1 + \frac{3z^2 - z + 4}{(z^2-1)^2} \begin{array}{l} \nearrow P(z) \\ \searrow Q(z) \end{array}$$

Les racines du dénominateur sont :

$$a = 1 \qquad \alpha = 2$$
$$b = -1 \qquad \beta = 2$$

Donc $\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A_0}{(z-1)^2} + \frac{A_1}{z-1} + \frac{B_0}{(z+1)^2} + \frac{B_1}{z+1}$

On a $A(z) = (z-1)^2 \frac{P}{Q} = \frac{3z^2 - z + 4}{(z+1)^2}$

$$A'(z) = \frac{(z+1)^2(6z-1) - 2(3z^2-z+4)(z+1)}{(z+1)^4}$$

$$A_0 = A(a) = \frac{3.1 - 1 + 4}{(2)^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$A_1 = \frac{1}{1!} A'(a) = \frac{1}{2!} \frac{20 - 6}{16} = -\frac{5}{2}$$

On trouve de même

$$B(z) = \frac{3z^2 - z + 4}{(z-1)^2} \; ; \; B'(z) = \frac{(z-1)^2(6z-1) - 2(z-1)(3z^2-z+4)}{(z-1)^4}$$

$$B_0 = \frac{8}{4} = 2 \; ; \; B_1 = \frac{1}{1!} \frac{4.7 + 4.8}{16} = \frac{15}{4}$$

Alors: $f(z) = z+1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z+1)^2} + \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{z+1}$

Cas particulier

Supposons que toutes les racines du dénominateur sont des racines simples. —

Soit: $f(z) = \frac{P(z)}{\varphi(z)}$; $\varphi(z) = (z-a)(z-b)(z-c) \dots$

D'après le cas général nous avons que

$$f(z) = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} + \frac{C}{z-c} \dots$$

Multiplions $f(z)$ par $z-a$:

$$(z-a) f(z) = A + z-a \frac{B}{z-b} + z-a \frac{C}{z-c}$$

Tous les termes exceptés A s'annulent pour $z=a$;

Ainsi A est la valeur de $f(z)$ pour $z=a$, ainsi

$$A = \lim_{z \to a} P(z) \cdot \frac{z-a}{\varphi(z)}$$

C'est une fraction de la forme $\frac{0}{0}$

En appliquant la règle de l'Hospital

or a: $A = \dfrac{P(a)}{\varphi'(a)}$, de même $B = \dfrac{P(b)}{\varphi'(b)}$ ...

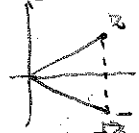
Donc $f(z) = \dfrac{P(z)}{\varphi(z)} = \dfrac{P(a)}{\varphi'(a)(z-a)} + \dfrac{P(b)}{\varphi'(b)(z-b)} \cdots$

Remarques sur les nombres complexes -

Nous avons employés jusqu'à présent des polynômes $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \ldots a_n z^n$. Ces polynômes ont des coefficients ~~réelles~~ réels ou complexes - Le théorème de D'Alembert s'appliquent aussi bien aux coefficients réels que complexes - Il en est de même dans la décomposition des fonctions rationnelles. -

Seulement, dans le cas où les coefficients sont réels on appelle conjugué de l'expression $z = x + iy$

le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$



si nous faisons le produit $z \cdot \bar{z}$:

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 ;$$

Ainsi le produit d'un nombre complexe par son conjugué égale le carré du module. -

Théorème.

Si z_1 est une racine d'une équation algébrique à coefficients réels la conjuguée de z_1 est aussi racine

de l'équation –

Soit $f(z)=0$ telle que $z = x_1 + iy_1$

$$f(z) = a_0 + a_1(x_1+iy_1) + a_2(x_1+iy_1)^2 \dots a_n(x_1+iy_1)^n = 0$$

On peut développer ce polynôme suivant la formule du binôme. On obtient un polynôme de degré n en x_1, y_1 et i

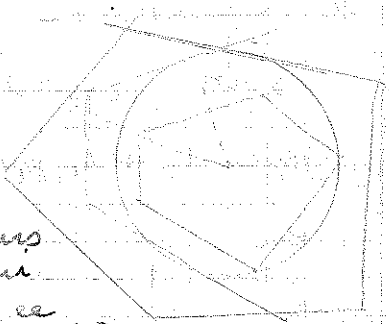
Toutes les puissances de i sont représentées par ±1 ou ±i [i^n paire pour n=p]

Or d'après les règles des nombres complexes, il faut que la partie réelle de $f(z)$ et la partie imaginaire de $f(z)$ soient nulles –

Or la partie réelle est celle où i a une puissance paire; ainsi cette partie réelle est formée de x_1 et de puissances paires de y_1
Si nous remplaçons y_1 par $-y_1$ la partie réelle reste toujours nulle car y_1 et $-y_1$ sont même valeur pour une puissance paire.
La partie imaginaire est aussi nulle. Ainsi $f(z)$ s'annule bien pour $x_1 - iy_1$. –

Donc: Dans une équation algébrique à coefficients réels, si z_1 est une racine l'expression conjuguée de z_1 est aussi une racine de l'équation.

Applications



Soit un cercle de rayon 1
Il y a des polygônes qui sont à l'intérieur du cercle : ce sont les polygônes intérieurs
Il y a des polygônes qui sont à l'extérieur : ce sont les polygônes extérieurs –
Les polygones inscrits sont un cas particulier des polygônes intérieurs
Les polygones circonscrits sont un cas particulier des polygônes extérieurs.
Il est facile de prouver que l'aire des polygônes extérieurs est supérieure à celle des polygônes intérieurs. –
Si y est l'aire des poly. ext. et x celle des poly. int. on a toujours

$$y > x$$

Tous les x sont donc bornés supérieurement et tous les y sont bornés inférieurement. –
Pour parler de limite, il faut mettre les x suivant un rang et montrer qu'après un certain rang la différence entre un x et la limite tend 0. –
Seulement nous supposerons qu'on ne puisse ranger les x [ce que l'on ne peut plus faire dans les années suivantes] –
Montrons que la borne supérieure de x est égale à la borne inférieure de y. – En effet il suffit de démontrer qu'il existe un polygône extérieur y et un polygône intérieur x tels que

$$y - x < \varepsilon$$

ε étant aussi petit qu'on veut. —

En effet si dans ce cas, nous supposions que les bornes ne soient pas égales, il y aura entre elle une différence a

borne inf. de y — borne sup de $x = a$

ou $y - x = a$ ou $y - x \geq a$

ce résultat est en contradiction directe avec notre supposition $y - x < \varepsilon$. Donc dans ce cas les bornes sont bien égales —

Reprenons la démonstration.

Soit un polygône intérieur x et un polygône extérieur y. —

Nous avons toujours dans x un coté qui soit le plus rapproché du centre. —

Soit z la distance de ce point à la circonférence. — La distance de ce point au centre est $1 - z$

D'après la théorie des figures semblables il est toujours possible d'augmenter la longueur des ~~poly~~ cotés du polygônes dans un rapport $\frac{1}{1-z}$. En procédant ainsi on arrive à un polygône qui finit par devenir extérieur. Soit y la valeur de l'aire de ce polygône, on a bien

$$\frac{y}{x} = \left(\frac{1}{1-z}\right)^2$$

$$y = \left(\frac{1}{1-z}\right)^2 x$$

$$y - x = x\left[\left(\frac{1}{1-z}\right)^2 - 1\right]$$

La quantité entre crochets est continue

pour tous les z différents de 1.
Aussi cette quantité est continue est dans le voisinage de $z=0$,
Pour ces valeurs de z approchées de 0 la différence $y-x$ tend vers ε, ε étant aussi petit qu'on veut.
Nous avons donc bien démontré que

$$y - x < \varepsilon$$

Ainsi la borne supérieure de x égale la borne inférieure de y. —

Soient les deux séries de polygones

$$x_1,\ x_2,\ x_3\ \ldots\ \text{poly. int.}$$
$$y_1,\ y_2,\ y_3\ \ldots\ \text{" ext.}$$

Prouvons que si ces deux suites de polygones constituent une série ils ont ~~une~~ limite commune. —
Nous savons d'après le théorème précédent que :

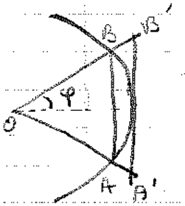
$$y_n - x_n < \varepsilon$$

Soient les x, les polygones réguliers inscrits et les y les polygones réguliers circonscrits. — Si nous prenons les polygones de 4 côtés — —

$x_2 =$	4	y_2
x_3	8	y_3
x_4	16	y_4
— — —	— — —	—
x_n	2^n	y_n

Soit un polygone de côtés 2^n.
Soient x_n l'aire du polygone inscrit et y_n l'aire du polygone circonscrit –

Soit 2φ l'un des angles au centre du polygone –



On a bien :

$$2\varphi = \frac{2\pi}{2^n}$$

$$\text{ou } \varphi = \frac{\pi}{2^n}$$

L'aire du polygone inscrit est :

$$x_n = 2^n.\text{aire } OAB = 2^n.\frac{1}{2}.2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$x_n = 2^n \sin\varphi\cos\varphi$$

De même $y_n = 2^n.\text{aire } OB'A' = 2^n.\operatorname{tg}\varphi$

$$y_n - x_n = 2^n\left[\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - \sin\varphi\cos\varphi\right] = 2^n\frac{\sin^3\varphi}{\cos\varphi}$$

Pour un polygone de côtés 2^{n+1} l'angle au centre est φ et on a :

$$y_{n+1} - x_{n+1} = 2^{n+1}\frac{\sin^3\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}$$

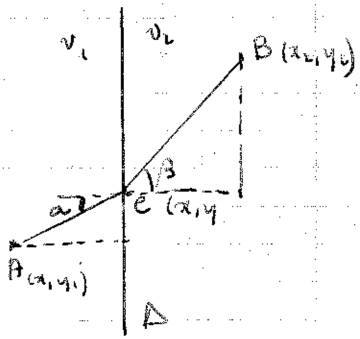
Le rapport $\frac{y_{n+1} - x_{n+1}}{y_n - x_n}$ égale :

$$\frac{y_{n+1} - x_{n+1}}{y_n - x_n} = \frac{2^{n+1}\sin^3\frac{\varphi}{2}.\cos\varphi}{2^n.\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)^3.\cos\frac{\varphi}{2}}$$

$$= \frac{\cos\varphi}{4\cos^4\frac{\varphi}{2}} = \frac{\cos\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}$$

cette quantité est toujours inférieure à $\frac{1}{2}$

Soient deux milieux de réfringence différente v_1 et v_2 la vitesses respectives de la lumière dans chacun des milieux.
Quel est le chemin le plus court [le temps] pour aller de A en B



On a : $T = \dfrac{AC}{v_1} + \dfrac{CB}{v_2}$

$$T = \frac{1}{v_1}\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

x est une quantité donnée car Δ est connu

Cherchons les dérivées pour trouver le T minim

$$\text{pour } T'_u = \frac{1}{v_1}\cdot\frac{2(y-y_1)}{2\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}} + \frac{1}{v_2}\cdot\frac{2(y-y_2)}{2\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}} = 0$$

~~mm~~

Or $\dfrac{y-y_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}} = \sin\alpha$

et $\frac{y-y_2}{\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}} = -\sin\beta$

On a donc pour Tmin

$$\frac{1}{v_1}\sin\alpha = \frac{1}{v_2}\sin\beta$$

qui n'est autre que la loi de la réfraction

Soit la formule de Taylor

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R_2$$

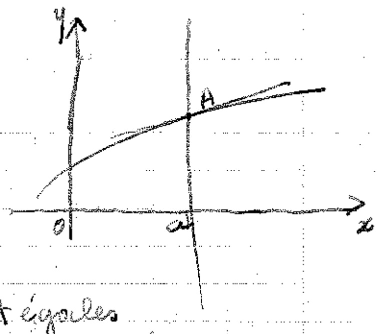
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + R_3$$

. . . .

$$f(x) = \dots \quad \frac{1}{n!}f^{(n)}(x-a)^n + R_n$$

Si l'on ne tient pas compte des restes R_2....
toutes les autres quantités sont des polynômes -

Dans le premier cas on a:
pour le polynôme une droite tangente à la courbe au point A -



Dans la 2e fonction est une fonction du second degré: une parabole
Les dérivées premières sont égales
et les dérivées secondes le sont aussi -
Dans ce cas la courbe $f(x)$ et la parabole sont tangentes en un point de second degré
En d'autres termes les deux courbes ont en $x=a$ une racine du troisième degré.

En continuant pour tous les autres polynômes on a toujours au point a une racine de n ième ordre –

Ainsi si nous remplaçons la courbe par chacun de polynômes nous avons une courbe de plus en plus rapprochée de celle que nous cherchons, dans le voisinage du point a.

Appliquons ceci à la fonction dérivable

$$y = f(x) = 1 - x + 5x^3 + 4x^4$$

pour en trouver d'une manière approchée les racines.

c'est-à-dire pour $x = a$; $f(a) = 0$

Nous savons que $x = g(y)$. Fonction inverse.

Si nous trouvons cette fonction il est facile de trouver a : $a = g(0)$

Le problème revient donc à trouver la fonction $g(y)$

Soit $x = x_1$; $y = y_1$ un point quelconque

On a: $y_1 = f(x_1)$; $x_1 = g(y_1)$

D'après la formule de Taylor:

$$x = g(y) = g(y_1) + g'(y_1)(y - y_1) + \frac{1}{2} g''(y_1)(y - y_1)^2 \ldots$$

Les inconnues dans le second membre sont $g'(y_1)$ $g''(y_1)$ ----.

Il suffit de calculer les dérivées de $g(y)$ et remplacer y par y_1.

Mais comme $f(x)$ et $g(y)$ sont inverses on a:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad ;$$

$$g''(y) = \frac{d\,g'(y)}{dy} = \frac{-f''[x]}{[f'(x)]^2} \cdot \frac{1}{f'(x)} = -\frac{f''}{f'^3}$$

$$g'''(y) = -\frac{f''' f^3 - 3f'^2 f' f''}{f'^6} \cdot \frac{1}{f'} = -\frac{f'''}{(f')^4} + \frac{3(f'')^2}{(f')^5}$$

Dans ces valeurs posons $x = x_1 = 0$; $y_1 = 1$
on a:

$$g'(y_1) = \frac{1}{f'(x_1)}$$

$$g''(y_1) = -\frac{f''(x_1)}{(f'(x_1))^2}$$

$$g'''(y_1) = -\frac{f'''(x_1)}{[f'(x_1)]^4} + \frac{3\,(f''(x_1))^2}{[f'(x_1)]^5}$$

~~$x = g(y)$~~ ; $f(0) = 1$; $f'(0) = -1$; $f''(0) = 0$

$f'''(0) = 30$

On a donc:

$$g(1) = 0 \quad ; \quad g' = -1 \quad ; \quad g''(1) = 0 \quad ; \quad g''' = -30$$

On a donc:

$$x = g(y) = 0 - 1(y-1) + 0 + \frac{1}{6}(-30)\cdot(y-1)^3 \ldots$$

Nous avons ainsi une formule approchée de y(y);

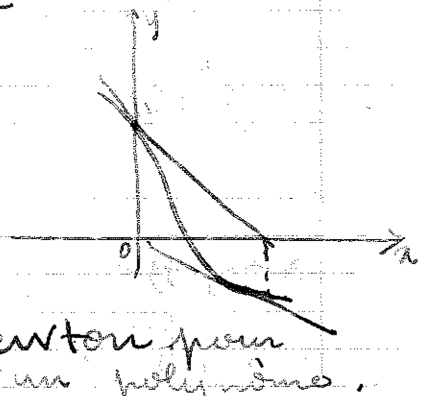
Faisons maintenant $y = 0$

on a: $a = 0 + 1 + 5 \ldots = 6$

Ainsi 6 est une valeur approchée de a. Il faut choisir une meilleure approximation telle que la nouvelle soit le plus près possible du point de départ. A cet effet nous prendrons comme point de départ la valeur approchée que nous avons trouvée. On arrive à une seconde valeur de la racine plus exacte que la première

Nous pouvons expliquer très bien ceci quand on prend la première dérivée seulement.

Dans ce cas, on remplace la courbe par la tangente au point de départ. puis le point où elle perce l'axe est un nouveau point de départ ...



Cette méthode est la méthode de Newton pour trouver les racines d'un polynôme.

La première méthode est plus exacte et donne une approximation plus grande

Calcul Intégral

Nous avions définit dans le calcul différentiel la dérivée et les procédés de dérivations.

Ainsi soit $y = f(x)$

La dérivée est $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$

Maintenant cherchons comment on peut passer de y' à y

Ceci est le procédé d'Intégration

La notation classique est:

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int y'\,dx$$

La fonction $f(x)$ est aussi appellée la fonction primitive de $f'(x)$

En générale une fonction primitive d'une autre fonction est une fonction telle que la dérivée de cette fonction égale la fonction donnée

Ce qui est très important c'est de savoir si le procédé d'intégration donne un ou plusieurs résultats. Dans le procédé de dérivation nous avons une seule dérivée tandis que dans l'intégration on a plusieurs résultats.

Ainsi, par exemple si

$f'(x) = x$; $f(x) = \frac{x^2}{2}$

Mais $f(x)$ peut égaler $\frac{x^2}{2} + 2.3.$

Ainsi $f(x) = \frac{x^2}{2} + C$

C est une constante quelconque.

Théorème - Il y a donc une infinité de fonctions primitives pour une fonction donnée et ces fonctions primitives ne diffèrent que d'une constante.

Soit une fonction $f'(x)$ et $f(x)$ une fonction primitive.

$f(x)+C$ est aussi une fonction primitive de $f'(x)$ car en dérivant on a pour résultat $f'(x)$

D'autre part soient deux fonctions primitives de $f'(x)$: $f(x)$ et $g(x)$

Par définition on a: $g'(x) = f'(x)$

ou $g'(x) - f'(x) = 0$

Mais la différence des dérivées égale la dérivée de la différence

on a donc: $\frac{d(g(x)-f(x))}{dx} = 0$

ce qui montre que $g(x) - f(x) = C^{te}$

et le théorème est démontré.

Le procédé indiqué dans l'intégration est le procédé qui donne

l'intégrale indéfinie

Par exemple: si $f'(x) = x$ est donné l'intégrale indéfinie est $f(x) = \frac{x^2}{2} + \text{const.}$

Intégrales des fonctions élémentaires

$f(x)=x^n$; nous savons que : $f'(x) = nx^{n-1}$

alors on peut dire que :

$$\int f(x)\,dx = \int x^n . dx = \boxed{\frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{const}}$$

car x^n est la dérivée de $\frac{x^{n+1}}{n+1}$

puisque la dérivée de x^{n+1} est : $(n+1).x^n$

Nous avions montré que ces formules étaient juste pour chaque n réel. mais la formule $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ n'a pas de sens pour $n=-1$

Seulement : si $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$

on a $\int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + \text{cte}$

Car la dérivée de $\ln x$ est $\frac{1}{x}$.-

<u>Intégrale de $\sqrt{x}$</u> ; $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + \text{cte}$

soit $\int \sqrt{x}\,dx = \boxed{\frac{2}{3} x^{3/2} + \text{const}}$

<u>Intégrale de $f(x) = a^x$</u>

Nous savons que $f'(x) = a^x \ln a$

alors $\int f(x)\,dx = \int a^x . dx = \boxed{\frac{a^x}{\ln a} + \text{cte}}$

De même

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C^{te}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C^{te}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C^{te}$$ [dérivée de $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}$]

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C^{te}$$ [dériv. de $\operatorname{cotg} x = -\frac{1}{\sin^2 x}$]

D'autre part: $\frac{d(\operatorname{arc}\sin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\frac{d(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x)}{dx} = \frac{\operatorname{arc} 1}{1+x^2}$$

On a donc $\frac{d(\operatorname{arc}\operatorname{cotg} x)}{x} = -\frac{1}{1+x^2}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc}\sin x + C^{te}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x + C^{te}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arc}\operatorname{cotg} x + C^{te}$$

On doit que (1) $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x + C^{te} = -\operatorname{arc}\operatorname{cotg} x + C^{te}$

Mais nous savons que:

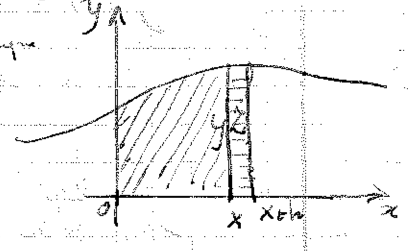
$$\operatorname{arc}\operatorname{cotg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\operatorname{tg} x$$

ce qui montre que l'égalité (1) a bien lieu

On montrerait aussi que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc}\sin x + C^{te} = -\operatorname{arc}\cos x + C^{te}$$

Interprétation géométrique de l'intégrale d'une fonction



Soit une fonction ~~f(x)~~ quelconque
Supposons connue
la notion d'aire
que nous verrons
plus tard.
Indiquons la valeur
de cette aire ~~par~~ f(x)
indiquée par les hachures par f(x)
Considérons une valeur x+h
la valeur de l'aire de la tranche
Z est $f(x+h) - f(x)$

Considérons le rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Si h diminue ce rapport a
pour limite y la hauteur du
rectangle Z. D'autre part

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

On a donc $y = f'(x)$

Donc si $f'(x) = y$ est donnée

l'intégrale f(x) donne la valeur
de l'aire

On comprend que cette
valeur est indéterminée car
on peut prendre l'aire
comprise entre l'axe des x
et des lignes verticales arbitraires
Nous verrons plus tard des
notions plus précises à ce sujet.

Règles d'intégration.

1°) L'intégrale d'une somme algébrique de plusieurs ~~deux~~ fonctions est égale à la somme algébrique des intégrales de chacune de ces expressions prises séparément

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$$

En effet en prenant les dérivées des 2 membres on obtient une identité.

$$f(x) + g(x) = f(x) + g(x)$$

Seulement on ne peut pas conclure de l'égalité de dérivées à l'égalité des intégrales car ces dernières diffèrent d'une constante. Seulement ceci n'a pas lieu d'être considéré ici puisque nous parlons d'intégrales indéfinis

2°) Un facteur peut s'écrire soit avant soit après le signe d'intégration

soit $\int c\, f(x)\,dx$

Différentions: $c f(x)$

$c \int f(x)\,dx$ — Différentions: $c f(x)$

On a bien $\int c\, f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx$

Avec ces deux règles on peut ~~différentier~~ intégrer les polynômes.

Ainsi:

$$\int (a + bx^3)\,dx = \int a\,dx + \int bx^3\,dx$$

$$= a\int dx + b\int x^3\,dx = ax + \frac{bx^4}{4} + C^{te}$$

ou plus généralement.

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n)\,dx = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 \dots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + C^{te}$$

3) Intégration par substitution ou changement de variable

On emploie cette méthode quand $f(x)$ ne peut s'intégrer suivant les règles 1 ou 2 ou suivant les règles des fonctions élémentaires.

Soit $f(x)$ une fonction. Nous cherchons

$$\int f(x)\,dx$$

Posons $x = \varphi(t)$, $\varphi(t)$ étant une fonction dérivable.

$$f(x) = f[\varphi(t)]$$

En faisant $\frac{dx}{dt}$ on a: $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$

$$dx = \varphi'(t)\,dt$$

Montrons que

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)].\varphi'(t).\,dt$$

En effet la dérivée du premier membre est: $f(x)$.

Le dérivée du second membre, par rapport à (t) est:

$f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$ Mais comme il faut prendre cette dérivée par rapport à x, il faut multiplier par $\frac{dt}{dx}$

Cette dérivée est donc:

$$f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\frac{dt}{dx}$$

Mais $\varphi'(t)\,dt = dx$; donc

$$f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\frac{dt}{dx} = f[\varphi(t)] = f[x]$$

car $\varphi(t) = x$

Ainsi on arrive bien à une identité.

On comprend maintenant pourquoi il faut mettre la notation dx dans l'intégrale car dx se comporte dans le procédé ci dessus, tout à fait comme un facteur que nous avons remplacé par sa valeur $\varphi'(t)\,dt$

<u>Exemple</u>

a/ $f(x) = e^{ax}$. Trouvons $\int e^{ax}dx$

Posons $ax = t$. On a: $e^{ax} = e^{t}$

En différentiant $x = \frac{t}{a}$ par rapport à t, on a:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{a} \quad ; \quad dx = \frac{dt}{a}$$

$$\int e^{ax}dx = \int e^{t}dx = \int e^{t}\frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\int e^{t}dt$$

$$= \frac{1}{a}e^{t} + cte$$

$$= \boxed{\frac{1}{a}e^{ax} + cte}$$

b/ $\int \frac{dx}{a+bx} = \,?$

Posons $a + bx = t$ Différentions: $b\frac{dx}{dt} = 1$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \int \frac{dx}{t} = \int \frac{dt}{t \cdot b} = \frac{1}{b}\int \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{1}{b} \log t + C^{te} = \frac{1}{b} \log(a+bx) + C^{te}$$

c) Trouver :

$$\int \frac{q\,dx}{(x-p)^2+q^2} = J$$

Posons $x-p = t$; $dx = dt$

Et alors $J = \int \frac{q\,dx}{(x-p)^2+q^2} = \int \frac{q\,dt}{t^2+q^2}$

Faisons encore une substitution

$t = qs$; $dt = q\,ds$

$$J = \int \frac{q^2 ds}{q^2(s^2+1)} = \int \frac{ds}{s^2+1} = \operatorname{arctg} s + C^{te}$$

$$J = \operatorname{arctg} s + C^{te}$$

$$J = \boxed{\operatorname{arctg} \frac{x-p}{q} + C^{te}}$$

d) Trouver $\int \frac{(x-p)\,dx}{(x-p)^2+q^2} = J$

Posons : $(x-p)^2+q^2 = t$

$$2(x-p) = \frac{dt}{dx}$$

$$dx = \frac{dt}{2(x-p)}$$

$$J = \int \frac{(x-p)\frac{dt}{2(x-p)}}{t^2} = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\log t + Cte$$

$$J = \frac{1}{2}\log\left[(x-p)^2+q^2\right] + Cte$$

c) $J = \int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$

Posons $x = a\sin t$

$$dx = a\cos t \,.\, dt$$

$$J = \int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,.\,dx = \int a\cos t \,.\, a\cos t\,.\,dt$$

$$J = a^2 \int \cos^2 t\,.\,dt$$

$$J = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt$$

$$J = \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int \cos 2t\,.\,dt$$

$$J = \frac{a^2}{2}.t + \frac{a^2}{2}\int \cos 2t \,.\, \frac{1}{2}\, d(2t)$$

$$J = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + Cte$$

$$J = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\, \sin\frac{x}{a}\cos\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + Cte$$

$$\boxed{J = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + Cte}$$

4) Intégration partielle ou par parties

On utilise ici l'intégrale du produit de 2 fonctions

Cherchons $\int p(x).q(x)\,dx$

Nous pourons toujours faire $f(x) = p(x).q(x)$

Nous employons ce moyen quand l'intégrale de $f(x)$ n'est pas connue. Nous faisons cette ~~fonction~~ décomposition de manière à connaître l'intégrale de $q(x)$ ou $p(x)$ au moins

Soit $\int q\,dx = Q$ supposé connue

$$\frac{d(p.Q)}{dx} = p'Q + pQ' = p'Q + pq$$

En prenant les intégrales de chaque membre, on a :

$$pQ = \int p'Q\,dx + \int pq\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\int pq\,dx = pQ - \int p'Q\,dx \\ Q = \int q\,dx\end{array}}$$

Cette formule est une transformation. Nous ne pourons trouver $\int pq\,dx$ que si nous connaissons $\int p'Q\,dx$.

Il y a des cas où cette dernière intégrale

est très compliqué. Mais il y a des cas aussi où ce procédé est très simple

<u>Exemples</u>

a) Soit $\underline{f(x) = x.e^x}$

Nous pouvons mettre $q = e^x$ et $p = x$; $p' = 1$ — $Q = e^x$

On a d'après la formule précédente

$$\int x e^x dx = x e^x - \int 1 . e^x dx$$

$$\boxed{\int x e^x dx = x e^x - e^x + C^{te}}$$

Il faut faire attention à ce que Q intervient deux fois dans la ~~différentiation~~ l'intégration. Aussi il faut employer dans ces deux cas la même constante.

En effet si $Q = \int + a$ on a ajouté ap et retranché $a\int p' dx = ap$ qui s'annulent réciproquement

b) $\underline{I = \int x^3 e^{ax} dx}$

Soit $e^{ax} = q$; $Q = \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$

$p = x^3$ $p' = 3x^2$

$$I = \frac{1}{a} x^3 e^{ax} - \int 3x^2 . \frac{1}{a} e^{ax} . dx$$

$$I = \frac{1}{a} x^3 e^{ax} - \frac{3}{a} \underbrace{\int x^2 e^{ax} . dx}_{I_1}$$

$$I_1 = \frac{3}{a}\left[\frac{1}{a}x^2 e^{ax} - \underbrace{\frac{2}{a}\int x e^{ax}dx}_{I_2}\right]$$

Mais il faut trouver I_2

$$I_2 = \frac{2}{a}\int x e^{ax}\,dx$$

$$I_2 = \frac{2}{a}\left[x\frac{1}{a}e^{ax} - \frac{1}{a}\int e^{ax}\right]$$

$$I_2 = \frac{2}{a^2}\left[x e^{ax} - \frac{1}{a}e^{ax}\right]$$

$$I_2 = \frac{2}{a^3}\left(ax e^{ax} - e^{ax}\right) = \frac{2e^{ax}}{a^3}(ax-1)$$

en portant I_2 dans I_1 on a:

$$I_1 = \frac{3}{a}\left[\frac{1}{a}x^2 e^{ax} - \frac{2e^{ax}}{a^3}(ax-1)\right]$$

$$I_1 = \frac{3e^{ax}}{a^4}\left[a^2x^2 - 2ax + 2\right]$$

Enfin en portant la valeur de I_1 dans I on a:

$$I = \frac{1}{a}x^3 e^{ax} - \frac{3e^{ax}}{a^4}\left[a^2x^2 - 2ax + 2\right]$$

$$\boxed{I = \frac{e^{ax}}{a^4}\left[a^3x^3 - 3a^2x^2 + 6ax - 6\right]}$$

Méthode classique d'intégration d'une fonction

Nous savons que pour les dérivées si la fonction donnée est élémentaire, la dérivée est aussi une fonction élémentaire

On ne peut pas dire la même chose pour l'intégrale. Aussi il faut dire qu'en générale l'intégrale d'une fonction élémentaire n'est pas une fonction élémentaire. Nous avons vu des exemples qui sont des exceptions.

Intégration d'une fonction rationnelle

Une fonction rationnelle est entière ou fractionnaire. Quand elle est entière c'est un polynôme. Nous avons vu le moyen d'intégrer un polynôme. Cherchons comment trouver l'intégrale d'un rapport de deux polynômes.

Soit à trouver $\int \frac{f(x)}{F(x)} dx$

Nous pouvons supposer que cette fraction est une fraction proprement dite.

Rappelons nous la méthode de décomposition des fractions rationnelles.

Soit $F(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}$......

Nous savons que:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} ---- + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}$$

$$+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} ---- + \frac{B_\alpha}{(x-b)^\alpha}$$

$$+ ----............$$

Les A, B, C... sont définis par des valeurs univoques.

En appliquant la règle d'intégration d'une somme, nous sommes amenés

a trouver les intégrales des fractions simples

soit à trouver : $\int \frac{A_m}{(x-a)^m}\,dx$

Si $m = 1$ nous savons que $\int \frac{A_1\,dx}{x-a} = A_1 \ln(x-a) + cte$

En général : $\int \frac{A_m\,dx}{(x-a)^m} = A_m \int \frac{dx}{(x-a)^m}$

ou $A_m \int (x-a)^{-m}\,dx$ ou $A_m \int (x-a)^{-m}\,d(x-a)$

soit $A_m \int (x-a)^{-m}\,d(x-a) = \frac{A_m}{-m+1}(x-a)^{-m+1} + cte$

Nous savons donc trouver les intégrales des fonctions simples et par suite les intégrale de $\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx$.

Seulement il peut arriver que les racines a, b, c .. soient des nombres imaginaires. Dans ce cas les fractions de degré supérieur à 1 ont des intégrales bien établies. Mais pour les fractions du genre $\frac{A_1}{x-a}$ dont l'intégrale est un log. on ne peut dire la même chose.
Il faut donc étudier la question.

Nous savons que dans le cas où les coefficients de $F(x)$ sont réels (et c'est ce que nous avons toujours supposé) si une racine complexe existe la valeur conjuguée de la complexe

est aussi racine.

Aussi si $a = p + qi$ et $A_1 = M + Ni$
$b = p - qi$ et $B_1 = M - Ni$

Nous pouvons réunir les valeurs conjuguées et.

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} = \frac{M+Ni}{(x-p)+qi} + \frac{M-Ni}{(x-p)+qi}$$

$$= \frac{2M(x-p) - 2Nq}{(x-p)^2+q^2} = \frac{2M(x-p)}{(x-p)^2+q^2} - \frac{2Nq}{(x-p)^2+q^2}$$

et alors: $\int\left(\frac{A_1}{x-a} + \frac{B_1}{x-a}\right)dx = \int \frac{2M(x-p)}{(x-p)^2+q^2}\,dx - \int \frac{2Nq}{(x-p)^2+q^2}$

Nous avons trouvé ces deux intégrales dans les leçons précédentes

et $\int\left(\frac{A_1}{x-a} + \frac{B_1}{x-b}\right)dx = M\ln[(x-p)^2+q^2] - 2N\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-p}{q}$

Ces formules peuvent donner des calculs très compliqués. Il faut d'ailleurs trouver les racines du polynôme $F(x)$ ce qui n'est pas toujours facile.

Nous avons vu aussi que l'intégration d'une fonction rationnelle fractionnaire se compose de deux parties :
une partie rationnelle [pour $m > 1$]
" " non rationnelle [pour $m = 1$]

Il peut arriver que la partie rationnelle n'existe pas ce qui a lieu si les racines de $F(x)$ sont simples. Mais la partie irrationnelle existe toujours. De sorte que:

l'intégrale d'une fraction rationnelle n'est jamais une fraction rationnelle

---

Soit $\int \frac{f(x)}{F(x)} dx$

Le dénominateur $F(x)$ peut être décomposé en un produit de facteurs linéaires.

Soit $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots$ le produit des facteurs de degré 1
et $Q(x) = (x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}\ldots$

On a bien $F(x) = P(x) \cdot Q(x)$

alors $\int \frac{f(x)}{F(x)} dx = \int \frac{f(x)}{P(x) \cdot Q(x)} dx$

En réunissant entre elles tous les facteurs de premier degré on a:

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} = \int \frac{X(x)}{P(x)} dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

Mais la seconde intégrale est une fonction non transcendante

On a donc: $\int \frac{f(x)}{F(x)} = \int \frac{X(x)}{P(x)} dx + \frac{Y(x)}{Q(x)}$ (1)

Cherchons $Q(x)$. $Q(x)$ égale le produit de toutes les racines de $F(x) = 0$ de degré $(\alpha-1)\ldots$

$\int Q(x)$ n'existe que si les racines sont d'un degré supérieur à 1]

Nous savons que si a est une

racine de degré α de $F(x)$ c'est aussi une racine de degré $\alpha-1$ de $F'(x)$.

Donc $(x-a)^{\alpha-1}$ est un facteur de $F'(x)=0$. Ceci est vrai pour toutes les racines de $F(x)$

Dès lors $Q(x)$ est un diviseur de $F'(x)$. C'est aussi un diviseur de $F(x)$. C'est d'ailleurs le p.g.c.d. de $F(x)$ et $F'(x)$ car s'il y avait un autre facteur commun à $F(x)$ et $F'(x)$ en dehors de $Q(x)$ cette racine devrait être au moins double et serait par suite contenue dans $Q(x)$.

Donc $Q(x)$ est bien défini: c'est le p.g.c.d. de $F(x)$ et $F'(x)$.

Connaissant $Q(x)$, on peut en déduire $P(x)$: $P(x) = \dfrac{F(x)}{Q(x)}$

Trouvons $y(x)$

Nous savons que $y(x)$ est de degré est inférieur à $Q(x)$.
Il en est de même pour $X(x)$ qui de degré inférieur à $P(x)$.

Soient: $X(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots$
$Y(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \dots$

Calculons les coefficients $a_0, a_1, \ldots$
$b_0, b_1, \ldots$

A cet effet prenons la dérivée des deux membres de (A).

$$\frac{f}{F} = \frac{X}{P} + \frac{Y'}{\varphi} - \frac{Y\varphi'}{\varphi^2}$$

$F = P.\varphi.$

$$(B)\quad f = \varphi X + PY' - \frac{P\varphi'}{\varphi} y$$

Montrons que $P\varphi'$ est divisible par φ. En effet en prenant la dérivée de φ' nous prenons la dérivée de chaque facteur qui comprend φ et la multiplions par tous les autres facteurs. En multipliant ces quantités par P nous obtenons bien un polynôme qui comprend tous les facteurs de φ.

L'égalité B donne deux polynômes qui doivent avoir des coefficients identiques. Nous aurons ainsi des équations qui nous donneront $a_0, a_1 \ldots$ et $b_0, b_1 \ldots$

<u>Exemple</u>

Soit $F(x) = (x-1)^3(x^2+2x-5)$

On peut voir facilement que:

$$P(x) = (x-1)(x^2+2x-5) \quad ; \quad \varphi(x) = (x-1)^2$$

Trouvons X et Y.

Comme $P(x)$ est de 3e degré X est de 2e

degré et comme $Q(x)$ est du 2e degré
Y est du 1er degré

on a donc : $X = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

et $Y = b_0 + b_1 x$

D'autre part l'expression (B) égale ici :

$$(x^2-2x+1)(a_0+a_1 x+a_2 x^2) + b_1(x-1)(x^2+2x-5)$$
$$- 2(x^2+2x-5)(b_0+b_1 X)$$

Nous avons ici une expression du 4e degré. cette expression égale le polynôme donné $f(x)$.
en égalant les coefficients des mêmes puissances de x, nous aurons 5 équations à 5 inconnues. Nous pouvons très bien trouver les b_0, b_1

Donc on peut trouver la partie rationnelle de l'intégrale sans trouver les racines de $F(x)$.
Malheureusement on ne peut faire la même chose pour la partie irrationnelle et il faut tout de même trouver les racines de $P(x)$.
Seulement il y a aussi une facilité : c'est de ne pas chercher les facteurs du 1er degré mais du second. On obtient ceci en considérant les facteurs deux à deux
Le numérateur sera un polynôme du 1er degré et l'intégrale devient pour chaque fraction de la forme $\int \frac{\alpha x + \beta}{a + 2bx + cx^2} dx$

Trouvons l'intégrale de $\int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{a+2bx+cx^2}$

Ajoutons et retranchons au dénominateur $\frac{\beta b}{c}$

L'intégrale cherchée devient :

$$\int \frac{\left(\alpha - \frac{\beta b}{c} + \beta x + \frac{\beta b}{c}\right)}{a+2bx+cx^2}\,dx \quad \text{soit}$$

$$= \int \frac{\left(\alpha - \frac{\beta b}{c}\right)dx}{a+2bx+cx^2} + \int \frac{\beta x + \frac{\beta b}{c}}{a+2bx+cx^2}\,dx \quad \text{ou}$$

$$= \frac{\alpha c - \beta b}{c}\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2} + \frac{\beta}{2c}\int \frac{2(cx+b)}{a+2bx+cx^2}\,dx$$

$$= \frac{\alpha c - \beta b}{c}\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2} + \frac{\beta}{2c}\,Ln\,(a+2bx+cx^2)$$

Tout revient à trouver $\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2}$

1) Supposons que le dénominateur ne possède pas de racine c'est-à-dire : $b^2-ac<0$ ou $ac-b^2>0$

alors: $$\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2} = \frac{1}{c}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{c}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{ac-b^2}{c^2}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\,\text{arc tg}\,\frac{b+cx}{\sqrt{ac-b^2}} + C^{te}$$

2) Supposons que le dénominateur possède des racines. Alors $b^2-ac>0$ et

$$\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2} = \frac{1}{c}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{c}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{b^2-ac}{c^2}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{c.2\sqrt{\frac{b^2-ac}{c}}}\,Ln\,\frac{x+\frac{b}{c}-\sqrt{\frac{b^2-ac}{c^2}}}{x+\frac{b}{c}+\sqrt{\frac{b^2-ac}{c^2}}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}}\,Ln\,\frac{cx+b-\sqrt{b^2-ac}}{cx+b+\sqrt{b^2-ac}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}} \ln \frac{cx+b-\sqrt{b^2-ac}}{cx+b+\sqrt{b^2-ac}}$$

En résumé

$$\int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{a+2bx+cx^2} = \frac{\beta}{2c} \ln(a+2bx+cx^2)$$

si $b^2-ac>0$ $\boxed{+\frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}} \ln \frac{cx+b-\sqrt{b^2-ac}}{cx+b+\sqrt{b^2-ac}}}$ $+ C^{te}$

si $b^2-ac<0$ $\boxed{+ \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{b+cx}{\sqrt{ac-b^2}}}$

Cas particulier

si $b^2-ac=0$ on a : $\int \frac{dx}{c(x-m)^2} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{x-m} + C^{te}$

Intégration d'une fonction irrationnelle

En général de telles intégrales ne donnent pas des fonctions élémentaires et par exemple $\int \sqrt{x^3+x^2+1}\,dx$ ne donne aucune combinaison d'une fonction élémentaire.

Nous ne nous occuperons que de l'intégration des fonctions qui peut

s'exprimer par une fonction rationnelle élémentaire.

Soit $y = \dfrac{ax+a_1}{bx+b_1}$ une fonction

a, a_1, b, b_1 sont des nombres quelconques rationnels ou non.

Soient α, β, γ ... des nombres rationnels.

Soit $R(x, y)$ une fonction rationnelle

Considérons $R(x, y^\alpha, y^\beta, y^\gamma \dots)$ qui est rationnelle par rapport à $x, y^\alpha \dots$ mais non par rapport à x seulement.

<u>Théorème</u>

$\int R(x, y^\alpha, y^\beta \dots) dx$ donne une fonction élémentaire.

si les $\alpha, \beta, \gamma \dots$ sont des nombres entiers il n'y a plus à discuter.

Supposons que les α, β, γ sont des nombres fractionnaires

Soit m tel que $\alpha = \frac{\alpha'}{m}$; $\beta = \frac{\beta'}{m}$ ...

Posons $y^{\frac{1}{m}} = t$ $\quad y = t^m$

alors on a: $ax + a_1 = t^m(bx + b_1)$

$$x = \frac{b_1 t^m - a_1}{a - bt^m}$$

Nous voyons que dx égale une fonction rationnelle de t, dt

$$dx = \text{fon.} R_{(t)} \cdot dt$$

L'expression à intégrer est:

$$R(x, t^{\alpha'}, t^{\beta'}, \ldots\ldots) \cdot \text{fon.} R_{(t)} \cdot dt$$

Cette expression est une expression rationnelle de t. Nous avons donc transformé notre expression en une expression rationnelle

__Exemple__

$$\int \sqrt[3]{x-1}\; x\, dx = J$$

Posons $x - 1 = t^3$; $x = t^3 + 1$; $dx = 3t^2 \cdot dt$

$$J = \int t(t^3+1)\, 3t^2 \cdot dt = \int (t^3+1) 3t^3 \cdot dt$$

$$J = \int 3\, t^6\, dt + 3 \int t^3\, dt$$

$$J = \frac{3}{7} t^7 + \frac{3}{4} t^4 + C^{te}$$

4/ $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}$

Ici: $y = x$ $\alpha = \frac{1}{2}$ $\beta = \frac{1}{3}$ $m = 6$

$y^{1/6} = t$ $y = t^6 = x$ $dx = 6t^5\,dt$

$$J = \int \frac{6t^5\,dt}{t^3 + 2t^2} = 6\int \frac{t^3\,dt}{2+t}$$

$$J = 6\int (t^2 - 2t + 4)\,dt + 6\int -\frac{8}{t+2}\,dt$$

$$J = 6\left[\int t^2\,dt - 2\int t.dt + 4\int dt - \int \frac{8}{t+2}\,dt\right]$$

$$J = 6\left[\frac{t^3}{3} - t^2 + 4t\right] - 48\,Ln(2+t) + cte$$

Intégrale de $y = \sqrt{a + 2bx + cx^2}$

a/ $c > 0$

Posons: $\sqrt{a+2bx+cx^2} = t \pm \sqrt{c}.x$

Alors $a + 2bx + cx^2 = t^2 \pm 2t\sqrt{c}.x + cx^2$

soit $a + 2bx = t^2 \pm 2t\sqrt{c}.x$

$$x = \frac{t^2 - a}{2b \mp 2t\sqrt{c}}$$

Nous voyons que dx donne

une expression rationnelle de t

et $R(x,y)\,dx = R\left[\frac{t^2-a}{2b \pm t\sqrt{c}},\ t \pm \sqrt{c}.x\right]$ fon. $R(t)\,dt$

Ainsi l'expression R est bien rationnelle.

b) $c < 0$

L'expression $a+2bx+cx^2$, pour x tendant ~~pour~~ vers ∞ ~~tend~~ conserve le signe de c. Si c est négatif l'expression est négative.

Si l'expression ne possède pas de racine elle a le signe de c et par suite est toujours négative. Ce cas ne nous intéresse pas maintenant car Dans ce cas y est imaginaire.

Donc l'expression $a+2bx+cx^2$ ne nous intéresse que quand elle possède des racines.

Soient α et β ces deux racines. On a:

$$a+2bx+cx^2 = c(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)^2\frac{c(x-\beta)}{x-\alpha}$$

alors $y = x-\alpha\sqrt{\frac{c(x-\beta)}{(x-\alpha)}}$

et nous avons ramené l'intégrale aux Intégrales précédentes.

Exemples

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+x^2}}$; $a+2bx+x^2 = (t-x)^2$

$a+2bx = t^2 - 2tx$

$$x = \frac{t^2 - a}{2(b+t)}$$

Nous pouvons trouver dx en fonction de t et dt:

D'ailleurs:

$a + 2bx = t^2 - 2xt$ en différentiant on a:

$$2b\,dx = 2t\,dt - 2x\,dt - 2t\,dx$$

D'où: $dx = \frac{t - x}{b+t} . dt$

Alors $\int \frac{dx}{t-x} = \int \frac{dt . t-x}{(t-x) b+t} = \int \frac{dt}{b+t}$

$I = Ln(b+t) + C^{te} = ln(b + x + \sqrt{a+2bx+x^2}) + C^{te}$

Si nous prenons $a + 2bx + x^2 = x + t$

nous aurions trouvé:

$I_1 = -Ln(b + x - \sqrt{a+2bx+x^2}) + C^{te}$

Montrons que $I - I_1 = C^{te}$

En effet: $I - I_1 = ln[(b+x)^2 - a - 2bx - x^2]$

$= \underline{ln[b^2 - a] = C^{te}}$

---

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx-x^2}}$

Soient α et β les deux racines du radical

Posons $t = \sqrt{-\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$; $t^2 = -\frac{x-\beta}{x-\alpha}$

$$x - \alpha = \frac{\beta - \alpha}{t^2+1} \qquad (1)$$

L'intégrale cherchée est :

$$I = \int \frac{dx}{(x-\alpha)t}$$

En différentiant (1) on a :

$$dx = -\frac{\beta-\alpha}{t^2+1}\, 2t.dt$$

$$I = -\int \frac{2dt}{t^2+1} = 2 \operatorname{arc\,cotg} t + C^{te}$$

$$I = 2 \operatorname{arc\,cotg} \sqrt{-\frac{x-b-\sqrt{b^2+a}}{x-b+\sqrt{b^2+a}}} + C^{te}$$

Autre méthode

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a+b^2-(x-b)^2}}$$

En divisant haut et bas par $\sqrt{a+b^2}$

on a : $I_1 = \int \frac{dx \frac{x-b}{\sqrt{a^2+b}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-b}{\sqrt{a^2+b}}\right)^2}} = \arcsin \frac{x-b}{\sqrt{a^2+b}} + C^{te}$

Montrons que I_1 et I ne diffèrent que d'une constante.

Nous avons trouvé dans I que

$I = 2 \operatorname{arc\,cotg} t + cte$

si $\operatorname{arc\,cotg} t = \varphi$ on a:

$I = 2\varphi + cte$

Nous avons $\operatorname{cotg} \varphi = t$

ou $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{t}$

et $\sin 2\varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{2 \frac{1}{t}}{1 + \frac{1}{t^2}} = \frac{2t}{t^2+1}$

Mais $t^2 + 1 = 2\sqrt{b+a}$

et $= t = m\sqrt{\frac{x-a}{x-b}} = x - b \ldots$

et $\sin 2\varphi = \frac{x-b}{\sqrt{a+bx}}$

On voit bien que $I_1 = I_2$

---

4 $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{a + 2bx + cx^2}}$

Posons $x = \frac{1}{z}$ $dx = -\frac{dz}{z^2}$

$I = -\int \frac{dz}{\sqrt{z^2\left(a + \frac{2b}{z} + \frac{c}{z^2}\right)}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{az^2 + 2bz + c}}$

Cette intégrale est déjà connue

Intégration des fonctions binomes

$$\int x^m (a+bx^n)^p\, dx$$

Si m, n, p sont des nombres entiers il n'y a pas de difficulté. Nous ne considérons que le cas où ces nombres sont fractionnaires

Soit $x^n = t$; $dt = n x^{n-1}\, dx$

$$dx = \frac{1}{n}\frac{dt}{x^{n-1}} = \frac{1}{n}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{n}}}$$

$$I = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m}{n}-\frac{n-1}{n}}(a+bt)^p\, dt$$

Cette intégrale est élémentaire dans 3 cas :

a) si p est entier. Dans ce cas nous aurons une expression facilement intégrable. [rationalisation.]

b) Si $\frac{m+1}{n}$ est entier et p rationnel

nous aurons aussi un resultat facile

c) Nous pourrons écrire :

$$\frac{1}{n}\int (a+bt)^p\, t^{\frac{m}{n}-\frac{n-1}{n}}\, dt = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m-n+1}{n}+p}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt$$

alors si $\frac{m+1}{n}+p$ est entier et p rationnel nous pourrons aussi arriver au même résultat

Exemple

$$I = \int x^3 \sqrt[3]{1-x^2}\, dx$$

Ici : $m = 3$ $n = 2$ $p = \frac{1}{3}$

C'est le cas où $\frac{m+1}{n}$ est entier.

On a : $x^2 = t$; $2x.dx = dt$; $dx = \frac{1}{2}\frac{dt}{\sqrt{t}}$

$$I = \frac{1}{2}\int t^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} \sqrt[3]{1-t}\,.dt = \frac{1}{2}\int t \sqrt[3]{1-t}\, dt$$

Posons $1-t = z^3$ $t = 1-z^3$; $x^2 = 1-z^3$

$z^3 = 1-x^2$

$$dt = -3z^2 dz$$

et $I = \frac{3}{2}\int (1-z^3)\, z^3 . dz$

$$I = -\frac{3}{2}\left[\frac{z^4}{4} - \frac{z^7}{7}\right] + C^{te}$$

$$I = -\frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{4}{3}}\left[\frac{1}{4} - \frac{1-x^2}{7}\right] + C^{te}$$

$$I = -\frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{4}{3}} . \frac{3+4x^2}{28}$$

$$I = -\frac{3}{56}(1-x^2)^{\frac{4}{3}}(3+4x^2)$$

En général on peut intégrer l'intégrale binôme par partie.

Posons : $\frac{m+1}{n} - 1 = q$ et alors l'intégrale devient : $\frac{1}{n}\int t^q (a+bt)^p dt = I(p.q)$

négligeons $\frac{1}{n}$

Cette méthode est exacte même si les 3 cas ne sont pas remplis.

Nous avons d'après la règle des partitions

$$I(p,q) = \frac{1}{q+1} t^{q+1}(a+bt)^p - \frac{bp}{q+1}\int t^{q+1}(a+b)^{p-1} dt$$

Donc :

$$(1)\quad I(p,q) = \frac{1}{q+1} t^{q+1}(a+bt)^p - \frac{bp}{q+1} I(p-1,q+1)$$

Nous avons donc réduit $I(p.q)$ à une autre intégrale où p est diminué de 1 et q augmenté de 1

Mais :

$$I(p-1,q+1) = \frac{1}{bp} t^{q+1}(a+bt)^p - \frac{q+1}{bp} I(p,q)$$

formule identique à l'autre

On aura identiquement :

$$(2)\quad I(p,q) = \frac{1}{b(p+1)} t^q(a+bt)^{p+1} - \frac{q}{b(p+1)} I(p+1,q-1)$$

On emploit avantageusement ces réductions quand les exposants sont assez grands. On peut employer les formule (1) ou (2) suivant que l'on a des exposants négatifs ou grands.

Nous avons vu ici les méthods d'intégrations des fonctions algébriques rationnelles ou algébriques.

En résumé l'intégrale est une

fonction élémentaire dans les cas suivants:

I $R(x)\,dx$

II $R(x, y^{\alpha}, y^{\beta})\,dx$ $y = \dfrac{a + a_1 x}{b + b_1 x}$; α, β rations.

III $R(x, \sqrt{a + 2bx + cx^2})\,dx$ ..

IV $x^m (a + bx^n)^p\,dx$

p ou $\dfrac{m+1}{n}$ ou $\dfrac{m+1}{n} + p$ entier

Seulement, nous acceptons ceci qu'il n'y a pas d'autres cas où l'intégrale est élémentaire.

D'ailleurs il existe une intégrale pour toute fonction mais cette intégrale n'a pas une expression connue. Par exemple:

$\int \sqrt{a + bx + cx^2 + dx^3}\,dx$ existe mais c'est une fonction elliptique.

Intégrales des fonctions transcendantes

Il y a des fonctions transcendantes qui ont des dérivées élémentaires. Mais nous verrons les classes suivantes:

1) $\int R(\sin x, \cos x)$

Posons $tg\,\frac{x}{2} = z$ (1)

Nous savons que: $\sin x = \dfrac{2z}{1+z^2}$; $\cos x = \dfrac{1-z^2}{1+z^2}$

En différentiant (1) on a:

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} dx = dz$$

$$dx = 2\,dz.\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2dz}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2dz}{1+z^2}$$

L'intégrale cherchée devient:

$$\int R\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\cdot\frac{2}{1+z^2}\,dz$$ qui

est une expression rationnelle de z.

Donc nous obtenons une méthode qui donne l'intégrale cherchée par des méthodes rationnelles

---

Exemple:

$$I = \int\frac{dx}{a\sin x + b\cos x} \quad ; \quad \text{Posons } \frac{b}{a} = tg\varphi$$

et $a\sin x + b\cos x = a\left[\sin x + \frac{b}{a}\cos x\right]$

$$= a\left[\sin x + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos x\right] = \frac{a}{\cos\varphi}\sin(x+\varphi)$$

et $$I = \int\frac{dx}{\frac{a}{\cos\varphi}\sin(x+\varphi)} = 1/\frac{a}{\cos\varphi}\int\frac{dx}{\sin(x+\varphi)}$$

L'intégrale cherchée se ramène à la recherche de l'intégrale $\int\frac{dx}{\sin x}$

ou plus généralement:

$$\int\frac{dx}{\alpha+\beta\sin x}$$

Posons $z = tg\frac{x}{2}$; $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$; ~~cos~~

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

et on a: $\mathcal{I}_1 = 2\int \frac{dz}{\alpha + \beta \cdot \frac{2z}{1+z^2}} = 2\int \frac{dz}{\alpha(1+z^2)+2\beta z}$

soit $\mathcal{I}_1 = 2\int \frac{dz}{\alpha z^2 + 2\beta z + \alpha}$

intégrale dont nous connaissons la solution

$$\int \sin^n x \cos^m x \, dx$$

Si n et m sont entier cet exemple est une expression rationnelle de $\sin x, \cos x$. En appliquant la transformation en fonction de $tg\frac{x}{2} = z$ on peut arriver au résultat. Seulement cette méthode est longue car on a dénominateur $(1+z^2)^{m+n+1}$

Seulement on peut simplifier ceci dans certains cas spéciaux

a) si m est impair on a:

$$\int \sin^n x \cos^{m-1} d(\sin x)$$

mais $m-1$ étant pair $\cos^{m-1}$ est une puissance exacte $\cos^2 x$ ou $1-\sin^2 x$

et alors $I = \int \sin^n x \, (1-\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}} d(\sin x)$

ou $\int t^n (1-t)^{\frac{m-1}{2}}\, dt$

On peut faire la même chose si n est impair.

Mais si m et n sont pairs on ne peut plus faire la même chose. On a recours alors à la méthode de partition des intégrales des différentielles binômes

---

$I = \int \sin mx \, . \cos nx \, dx$

Mais $\sin mx \, . \cos nx =$

$\frac{1}{2}[\sin(m+n)x - \sin(m-n)x]$

et $I = \frac{1}{2}\int dx . \sin(m+n)x - \frac{1}{2}\int \sin(m-n)x\, dx$

ceci peut être trouvé facilement.

Nous voyons ici, que nous avons décomposé un produit du second degré en la somme ou la différence de facteurs de 1er degré.

En appliquant ceci aux intégrales précédentes nous voyons que nous pouvons décomposer $\sin^n x . \cos^m x$ en la somme de plusieurs facteurs. et nous voyons aussi que ceci a lieu même si m et n ne sont pas entier.

Soit P un symbole indiquant des opérations rationnelles et entières de certaines variables.

<u>L'intégrale de: $P(x, e^{\alpha x}, \sin\beta x, \sin\gamma x \ldots \cos\beta' x \ldots)$</u>
<u>est une fonction élémentaire.</u>

[$\alpha, \beta, \gamma \ldots \beta', \gamma' \ldots$ sont des nombres réels]

Pour démontrer ceci considérons chaque termes du polynôme et montrons que:

$$\int x^n e^{\alpha x} (\sin\beta x)^{m_1} (\sin\gamma x)^{m_2} \ldots (\cos\beta' x)^{n_1} (\cos\gamma' x)^{n_2} \ldots dx$$

est une fonction élémentaire.

Nous avons vu que les produit de $\sin x$ $\cos x$ à des puissances quelconques peut être décomposé en la somme de facteurs linéaires et tout revient à trouver

$$\int x^n e^{\alpha x} \sin\beta x \, dx \quad \text{et} \int x^n e^{\alpha x} \cos\beta x \, dx$$

a) supposons: $n = 0$. Les intégrales cherchées deviennent:

$$\int e^{\alpha x} \begin{matrix}\sin\beta x \\ \cos\beta x\end{matrix} \, dx$$

Trouvons $d(e^{\alpha x} \cos\beta x)$

$$d(e^{\alpha x} \cos\beta x) = e^{\alpha x}[\alpha \cos\beta x - \beta \sin\beta x] dx$$

De la même façon:

$$d(e^{\alpha x}\sin\beta x) = e^{\alpha x}[\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x]\,dx$$

$$d(e^{\alpha x}\cos\beta x) = e^{\alpha x}[\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x]\,dx$$

Ce sont deux deux équations à deux inconnues: $e^{\alpha x}\sin\beta x$ et $e^{\alpha x}\cos\beta x$

En résolvant ces deux équations on a:

$$-\beta\, d(e^{\alpha x}\cos\beta x) + \alpha\, d(e^{\alpha x}\sin\beta x) = (\alpha^2+\beta^2)\, e^{\alpha x}\sin\beta x\, dx$$

$$\alpha\, d(e^{\alpha x}\cos\beta x) + \beta\, d(e^{\alpha x}\sin\beta x) = (\alpha^2+\beta^2)\, e^{\alpha x}\cos\beta x\, dx$$

et alors:

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\, dx = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left[-\beta\cos\beta x + \alpha\sin\beta x\right]e^{\alpha x} + \text{cte}$$

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\, dx = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left[\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x\right]e^{\alpha x} + \text{cte}$$

Nous voyons que ces deux intégrales se ressemblent et il n'y a qu'un jeu de coefficients et en général:

$$\int e^{\alpha x}\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\beta x\, dx = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$$

Quand à $\int x^n e^{\alpha x}\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\beta x\, dx$ on a en appliquant la règle de dérivation par partie.

$$\int \underbrace{x^n}_{f}\, \underbrace{e^{\alpha x}\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\beta x\, dx}_{g} = x^n e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$$

$$- n\int x^{n-1} e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$$

Ainsi nous avons abaissé la puissance

de x de 1 unité. En continuant ainsi jusqu'à la n^e dérivée on arrive à la puissance x^0 qui égale 1 et par suite au résultat.

Donc en général nous pouvons trouver l'intégrale:

$$\int P(x, e^{\alpha x} \sin \beta x, \sin \gamma x \ldots) dx$$

P indique des opérations entières et rationnelles.

Nous avons aussi trouvé $\int R(\sin x \cos x) dx$

et dans tous les cas où nous pouvons réduire les fonctions transcendantes aux deux formes ci-dessus nous arriverons au résultat.

<u>Exemples</u>

1) $\int P(x, \ln x) dx$.

Posons $\ln x = z$; $\frac{1}{x} = \frac{dz}{dx}$; $dx = x dz$

ou $dx = e^z dz$

et $\int P(x, \ln x) dx = \int P(e^z, z) e^z dz$

$= \int P_1(e^z, z) dz$ intégrale qui a la forme $\int P(\ldots)$. et que nous pouvons par suite calculer.

2) $\int P(x, \arcsin x) dx$.

Posons: $\arcsin x = z$; $x = \sin z$

$dx = \cos z \cdot dz$ et

$$\int P(x, \arcsin x)\,dx = \int P(\sin z, z)\cos z\,dz$$

forme connue.

L'intégrale définie

Nous avons défini l'intégrale indéfinie comme l'opération inverse de la différentiation.

Ainsi :

$$f(x) = \frac{dF}{dx}$$

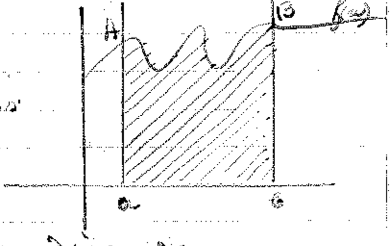
$$F(x) = \int f(x)\,dx + C^{te}$$

Nous l'appelons intégrale indéfinie car il y avait la quantité constante arbitraire.

Nous donnerons maintenant une définition de l'intégrale sans introduire aucunement les différentielles.

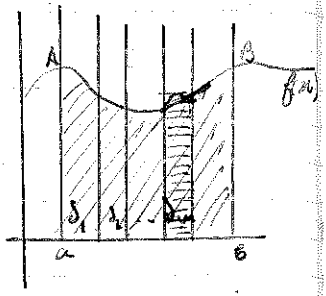
Notion d'aire

Soit une courbe $f(x)$. Considérons 2 points d'abscisses a et b. Qu'est-ce que l'aire $AabB$?



Nous savons que les aires des triangles, rectangles, parallélogramme... sont élémentaires. Mais nous ne pouvons pas appliquer ceci à une courbe car la division en triangles ou en rectangles n'est pas suffisante.

Ainsi on ne peut pas dire quelque chose sur l'aire considérée. Il faut donner une définition... Seulement il faut certaines conditions auxquelles doit satisfaire la courbe $f(x)$: être continue par exemple....



Divisons l'intervalle de a, b en n intervalles : $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \dots$

On a naturellement :

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \dots + \delta_n = b - a$$

Nous supposons $\delta_m > 0$

Si nous connaissions l'aire limitée par δ_m nous pourrions trouver l'aire totale en faisant la somme des aires partielles.

Considérons donc l'intervalle δ_m où $f(x)$ est maximum ou minimum.

si $\overline{f_m} = f(x)$ maximum

$\underline{f_m} = f(x)$ minimum

Nous considérons les rectangles ayant pour base δ_m et hauteur $\overline{f(m)}$ et $\underline{f(m)}$

Nous pouvons dire que : $\delta_m \overline{f(x)}_m \geq \delta_m \underline{f_m}$

car $\overline{f_m} \geq \underline{f_m}$

Mais puisque $\overline{f_m}$ est un maximum et $\underline{f_m}$ un minimum, l'aire de la courbe est comprise entre l'aire

des deux rectangles.

Donc : $\boxed{\delta_m \underline{f_m} \leq F_m \leq \delta_m \overline{f_m}}$

Cette supposition ainsi que

$$\boxed{F = F_1 + F_2 + F_3 \dots + F_n}$$

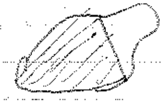
nous suffiront à donner la définition de l'aire

Définitions

1) L'intégrale définie de f(x) de a à b c'est la mesure de l'aire comprise entre la courbe l'axe des abscisses, et les verticales de a et b.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{mesaire } A a b B$$

2) Supposons qu'il existe un nombre qui par définition mesure l'aire d'une figure.



Nous emploierons les deux axiomes trouvés ci-dessus :

1) Une partie de l'aire est inférieure à l'aire totale ou plutôt : le nombre qui mesure une partie de l'aire est inférieur au nombre qui mesure l'aire totale

2) L'aire totale égale la somme des aires partielles

$$F = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \dots$$

Nous savons que:

$$\delta_m \underline{f_m} < F_m \leq \delta_m \overline{f_m}$$

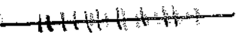
Soit $\underline{F} = \sum_{m=1}^{n} \delta_m \underline{f_m}$

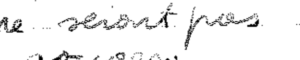
$$\overline{F} = \sum_{m=1}^{n} \delta_m \overline{f_m}$$

$$F = \sum_{m=1}^{n} F_m$$

Il y a ici une difficulté dans la définition de F car on peut choisir n n'importe comment de même que δ_m.
Pour lever cette difficulté il faut trouver une solution qui convienne pour toutes les valeurs de n et δ_m.

Il est évident que: $\underline{F} \leq \overline{F}$

Si dans la ligne de nombres 
nous représentons $\underline{F}$ en | et $\overline{F}$ en |,
il est facile de voir que les ~~traits~~ bleus peuvent entrer entre les deux mais ne seront pas au delà des traits ~~bl~~ rouges.

Supposons que les traits rouges tendent vers une limite quand ils augmentent indéfiniment. Si nous montrons aussi que les traits bleus tendent 
aussi vers la même limite, nous pourrons dire que cette

limite est F

Montrons que ceci a lieu si la fonction $f(x)$ est continue.
La démonstration comprend deux parties :

1) Si $\overline{F}$ et $\underline{F}$ possèdent une limite ces deux limites sont égales.

$$\lim \overline{F} = \lim \underline{F}$$

2) $\lim F$ existe

1 – A cet effet essayons de mettre un ordre dans les méthodes de division. Soit δ_{max} la valeur maximum d'une partie de division entre a, b. Il est évident que cette valeur peut entrer plusieurs fois dans l'intervalle.
Nous considérerons toutes les séries de départagement pour lesquelles $\delta_{max} \to 0$.

Dans ce cas $(\overline{F} - \underline{F}) \to 0$ pourvu que $f(x)$ soit continue.

Or une fonction est continue si dans un intervalle δ aussi petit qu'on veut nous pouvons toujours écrire que dans cet intervalle $|f_{max} - f_{min}| < \varepsilon$

Faisons $\overline{F} - \underline{F}$: $\overline{F} - \underline{F} = \Sigma \left(\delta_m \overline{f_m} - \delta_m \underline{f_m} \right)$

$$= \Sigma\, \delta_m \left(\overline{f_m} - \underline{f_m} \right)$$

Mais d'après ci dessus : $\Sigma\, \delta_m \left(\overline{f_m} - \underline{f_m} \right)$

est inférieur à $\sum \delta_m \varepsilon$

$$\text{ainsi} \quad \sum \delta_m (\overline{f_m} - \underline{f_m}) < \sum \delta_m \varepsilon$$

$$\text{ou} \quad \sum \delta_m (\overline{f_m} - \underline{f_m}) < \varepsilon \sum \delta_m$$

$$< \varepsilon (b-a)$$

$$\text{donc} \quad |\overline{F} - \underline{F}| < \varepsilon (b-a)$$

ce qui montre que cette différence est aussi petite qu'on veut pour n suffisamment aussi grand.

En d'autres termes

$$\lim |\overline{F} - \underline{F}| = 0$$

Mais si nous supposons que les $\lim \overline{F}$ et $\lim \underline{F}$ existent

nous pouvons écrire:

$$\lim \overline{F} - \lim \underline{F} = 0$$

$$\lim \overline{F} = \lim \underline{F}$$

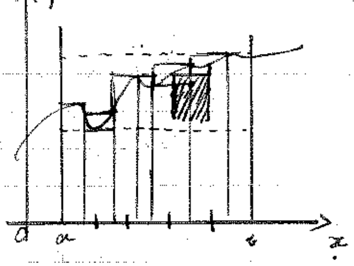
ce qui démontre la première partie du théorème.

D'autre part pour chaque subdivision de δ_m il y a de $\underline{F}$ qui changent.

Seulement on peut montrer que les $\overline{F}$ et $\underline{F}$ sont bornés. En effet soient f_{min} et f_{max} les valeurs minimum et maximum entre

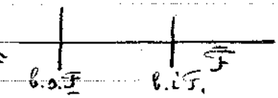
de $f(x)$ entre a et b. On peut voir facilement que:

$$f_{max}\cdot(b-a) \geq \begin{cases}\overline{F}\\ \underline{F}\end{cases}$$



et $$f_{min}\cdot(b-a) \leq \begin{cases}\overline{F}\\ \underline{F}\end{cases}$$

Mais si les F ont une borne supérieure cela veut dire qu'il n'y a aucun point de F qui sort à droite de la borne. Il en est de même pour la borne inférieure où il n'y a aucun point qui sort à gauche.



Nous considérons:
borne sup. de $\underline{F}$
borne inf. de $\overline{F}$

Il y a trois cas possibles:
$$\begin{cases} a)\ b.i.\overline{F} < b.s.\underline{F} \\ b)\ b.i.\overline{F} > b.s.\underline{F} \\ c)\ b.i.\overline{F} = b.s.\underline{F} \end{cases}$$

a) Si le premier cas avait lieu, il y aurait toujours au voisinage des bornes un $\underline{F}$ et un $\overline{F}$ tels que: $\overline{F} < \underline{F}$

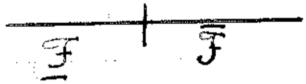
Montrons que ceci n'est pas possible. En effet dans le cas où le système de division est le même pour les $\overline{F}$ et les $\underline{F}$ ceci est facile à voir sur la figure:
$$\overline{F} > \underline{F}$$
Dans le cas où les divisions pour $\overline{F}$ et $\underline{F}$ ne sont pas les mêmes on pourrait voir facilement sur la figure que la même inégalité a lieu. Donc ce cas [$\overline{F} < \underline{F}$] ne peut pas avoir lieu.

b) Alors est-ce que b.i. $\overline{F}$ > b.s. $\underline{F}$?
alors on peut trouver aux voisinage des bornes des $\overline{F}$ et $\underline{F}$ tels que: $\overline{F} > \underline{F}$

Mais nous avons vu que $\bar{F} - \underline{F} < \varepsilon(b-a)$
Ainsi il n'y a pas dans le voisinage de la b. i. $\bar{F}$ un nombre qui n'appartienne à $\underline{F}$. De là nous concluons que le cas b. i $\bar{F}$ > b. s. $\underline{F}$ n'a pas lieu mais :

$$\text{b.i. } \bar{F} = \text{b. s. } \underline{F}.$$

Il se peut que les $\bar{F}$ soient à droite et les $\underline{F}$ à gauche mais les bornes sont égales.



Si nous divisons les δ_m en des intervalles de plus en plus petits les quantités : b. i. $\bar{F}$, b. s. $\underline{F}$, lim $\bar{F}$, lim $\underline{F}$ sont toutes égales et alors :

Définition

La limite commune de $\bar{F}$ et $\underline{F}$ qui est l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les ordonnées des points d'abscisses a et b est appelée l'intégrale définie de $f(x)$ entre a et b.

$$\lim \bar{F} = \lim \underline{F} = \int_a^b f(x)\, dx$$

Mais comme $\bar{F}$ et $\underline{F}$ ont la même limite nous pouvons prendre un point d'abscisse x_m entre les abscisses de $\bar{F}$ et $\underline{F}$. Alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_m \delta_m\, f(x_m)$$

Seulement dans tout ceci nous avons supposé $f(x)$ continue et bornée. a et b sont des valeurs finies.

De plus dans $\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_m \delta_m f(x_m)$

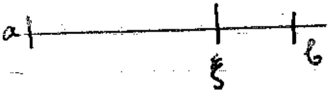
on parcourt une suite infinie de subdivision entre a et b de manière que le maximum de δ_m tende vers 0. Nous avons vu que pour toutes ces subdivisions toutes les sommes ont la même limite qui l'intégrale définie.

__Théorème__

Soit ξ une valeur comprise entre a et b. on a:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\xi f(x)\,dx + \int_\xi^b f(x)\,dx$$

Pour démontrer ceci nous prendrons une suite dans laquelle δ_m tend vers 0 et dont ξ est un point de subdivision.



Alors nous pouvons diviser la somme de a en b en deux: la somme de a à ξ et la somme de ξ à b. Mais comme par définition les intégrales définies sont des limites des sommes on peut écrire:

Théorème.

Soit ξ Il existe toujours entre a et b une valeur ξ telle que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(\xi)$$

En effet nous pouvons écrire:

$$\sum_m f(x_m)\,\delta_m \leq \sum_m f_{max}\,\delta_m$$

et $$\sum_m f(x_m)\,\delta_m \geq \sum_m f_{min}\,\delta_m$$

Mais $$\sum_m f_{max}\,\delta_m = f_{max}(b-a)$$
$$\sum_m f_{min}\,\delta_m = f_{min}(b-a)$$

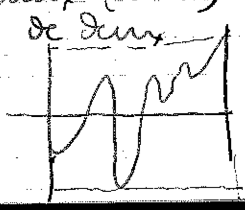
Ainsi la somme $\sum_m f(x_m)\,\delta_m$ est enfermée entre deux valeurs. Si on passe à la limite nous pourrons écrire:

$$f_{min}(b-a) \leq \lim \sum_m f(x)\,dx_m \leq f_{max}(b-a)$$

ou

$$f_{min}(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq f_{max}(b-a)$$

Mais $f_{min}(b-a)$ et $f_{max}(b-a)$ représentent les aires de deux rectangles.

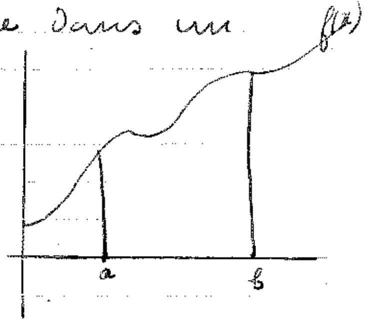


Si la fonction $f(x)$ est continue, elle passe par toutes les valeurs comprises entre a et b. Comme ~~elle est enfermée~~ l'intégrale est enfermée entre l'aire des deux rectangles, il y aura toujours un nombre ξ $a < \xi < b$ tel que

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi)$$

Théorème fondamental

Soit une fonction $f(x)$ continue dans un intervalle a, b $[b > a]$



Nous savons que

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ est}$$

bien déterminé

Supposons a fixe et b variable. Comme pour chaque valeur définie de b $\int_a^b f(x)\,dx$ a une valeur bien déterminée, $\int_a^b f(x)\,dx$ peut être considérée comme fonction de b

L'intégrale définie considérée comme fonction de sa limite supérieure est une fonction continue dérivable et sa ~~fonction~~ dérivée est égale à $f(b)$

$$\frac{d\int_a^b f(x)\,dx}{db} = f(b)$$

Considérons l'aire hachurée qui est

représentée par $\int_a^b f(x)\,dx$) Nous avons vu que cette intégrale était fonction de b.

D'après la définition de la dérivée :

$$\frac{d\int_a^b f x\,dx}{db} = \lim_{h=0} \frac{\int_a^{b+h} f(x)\,dx - \int_a^b f\,dx}{h}$$

Mais d'après le théorème ~~précédent~~

$$\int_a^{b+h} f(x)\,dx = \int_b^{b+h} f x\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$$

D'où :

$$\frac{d\int_a^b f(x)\,dx}{db} = \lim_{h=0} \frac{\int_b^{b+h} f(x)\,dx}{h}$$

Appliquons au numérateur le 2e théorème :

$$\int_b^{b+h} f\cdot dx = (b+h-b)\, f(\xi)$$

$$b+h < \xi < b$$

Donc $\frac{d\int_a^b f\cdot dx}{db} = \lim_{h=0} \frac{h\, f(\xi)}{h} = \lim_{h=0} f(\xi)$

Si nous faisons tendre h vers 0 ξ tend vers b - Mais puisque la fonction est continue $\lim_{\xi \to b} f(\xi) = f(b)$

alors: $$\frac{d\int_a^b f(x)\,dx}{db} = \lim_{\xi \to b} f(\xi) = f(b)$$

c.q.f.d.

Mais nous savons d'autre part

que $\int f(x)\,dx = F(x) + c^{te}$

$F(x)$ est une fonction qui admet $f(x)$ comme dérivée.

En appliquant ceci à b dans le théorème fondamental nous devrons écrire:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) + c^{te}$$

Remarque La notation $\int_a^b f(x)\,dx$ est indépendante de x. L'intégrale n'est ici que fonction de b.

Seulement pour que l'égalité ci dessus ait lieu, il fault trouver la valeur de la constante car cette fonction est bien parmi les fonctions $F(x)$, mais seulement pour une valeur déterminée de la constante.

Pour trouver cette constante, il faudrait connaître une seule valeur de b alors on pourrait calculer la constante connaissant la valeur de l'intégrale définie pour cette valeur expresse de b

Mais comme $\int^b$ étant une fonction continue, en faisant approcher b de a de manière que b − a tende vers 0, à la limite, l'aire représentée par l'intégrale étant nulle on peut écrire:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Mais comme l'intégrale $\int_a^b = F(b) + Cte$

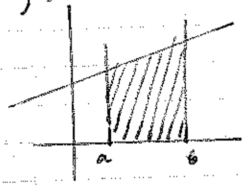
est vraie pour toutes les valeurs de b et par suite pour la valeur b = a on doit avoir:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 = F(a) + Cte$$

D'où $\quad Cte = -F(a)$

et $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

C'est la formule qui donne la valeur de l'intégrale définie de la fonction $f(x)$ de a à b connaissant $\int f(x)\,dx = F(x)$



exemple

Soit $f(x) = \alpha + \beta x$

Trouvons: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (\alpha + \beta x)\,dx$

Mais $\int (\alpha + \beta x)\,dx = \alpha x + \frac{\beta}{2}x^2 + Cte$

Alors $\int_a^b (\alpha+\beta x)\,dx = \alpha b + \frac{\beta}{2} b^2 - (\alpha a + \frac{\beta}{2} a^2) + cte - cte$

$$= \alpha(b-a) + \frac{\beta}{2}(b^2-a^2)$$

$$= (b-a)\left[\alpha + \frac{\beta}{2}(b+a)\right]$$

Pour montrer ce que cela signifie

écrivons $\int_a^b = \frac{1}{2}(b-a)\left[(\alpha+\beta a)+(\alpha+\beta b)\right]$

ce qui donne la formule de

l'aire d'un trapèze.

On emploie aussi pour l'intégrale définie les notations suivantes:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b$$

<u>Remarque</u>.

Nous avons montré que l'intégrale définie d'une fonction continue et bornée était une valeur bien déterminée et qu'elle était en connexion étroite avec l'intégrale indéfinie. Aussi, en d'autres termes nous avons montré qu'il existe toujours une intégrale de la fonction $f(x)$ pourvu qu'elle soit continue et bornée. Seulement nous ne pouvons pas toujours dire qu'elles ont une ... simple. Aussi une fonction continue est bornée est toujours intégrable mais pas toujours

intégral dérivable.

Exemples théoriques

1) $\int_a^b p(x)\, q(x)\, dx = \left[p Q - \int Q p' dx \right]_a^b$

Mais nous pouvons écrire

$$\int_a^b p(x)\, q(x)\, dx = \left[p Q \right]_a^b - \int_a^b Q p' dx$$

2) Méthode de substitution

On posait $x = \varphi(z)$ ou $z = \psi(x)$

Nous savons que :

$$\int f(x)\, dx = \int f[\varphi(z)]\, \varphi'(z)\, dz = F(z) + c^{te}$$
$$= F[\psi(x)]$$

et alors $\int_a^b f(x)\, dx = \left[F\{\psi(x)\} \right]_a^b$

$$= F[\psi(b)] - F[\psi(a)]$$
$$= \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f[\varphi(z)]\, \varphi'(z)\, dz$$

Donc :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f[\varphi(z)]\, \varphi'(z)\, dz$$

Exemple

$$\int_0^1 e^{ax}\,dx \qquad \text{Posons} \quad ax = z \qquad x = \frac{z}{a}$$

Donc $\int_0^a e^z \frac{dz}{a}$ est une autre expression simple de l'intégrale cherchée

$$= \frac{1}{a}\left[e^z\right]_0^a = \frac{1}{a}\left[e^a - 1\right]$$

Exemples pratiques

1) $$\int_0^1 x^m (1-x)^n\,dx = I_{m,n} = ?$$

Soit $x^m = q$ et $(1-x)^n = p$

alors $$\int x^m = \varphi = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

et $$p' = -n(1-x)^{n-1}$$

et alors: $$I_{m,n} = \left[\frac{1}{m+1} x^{m+1} (1-x)^n\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{m+1} x^{m+1}\, n(1-x)^{n-1}\,dx$$

Le membre entre crochets s'annule pour $x=1$ et $x=0$ - Donc il n'y a pas à en tenir compte

et alors: $$I_{m,n} = \frac{n}{m+1} I_{m+1,\,n-1}$$

Ceci n'a lieu que si $n > 0$

On peut écrire évidemment:

$$I_{m,n} = \frac{n}{m+1} I_{m+1,\,n-1} = \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2} I_{m+2,\,n-2}$$

Si n est entier on peut comp. continuer jusqu'à 1. On a :

$$I_{m,n} = \dots = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdot 1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)} I_{m+n,0}$$

Mais $$I_{(m+n),0} = \int_0^1 x^{m+n}\cdot 1\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{m+n+1} x^{m+n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{m+n+1}$$

et on a alors la forme générale :

$$I_{m,n} = \frac{1}{m+n+1} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}$$

$$I_{m,n} = \frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)(m+n+1)}$$

Si m est aussi un entier

$$I_{m,n} = \frac{1}{m+n+1} \frac{n!\,m!}{(m+n)!}$$

et $$\frac{1}{I_{m,n}} = (m+n+1)\binom{m+n}{n} = (m+n+1) C_n^{m+n}$$

C_n^{m+n} sont les coefficients du binôme

---

y) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin ax \, dx = \left[-\frac{1}{a}\cos ax\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$= -\frac{1}{a}\cos\frac{a\pi}{2} + \frac{1}{a}\cos a.0$$

$$= -\frac{1}{a}\cos\frac{a\pi}{2} + 1$$

α) Si a est entier et impair

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin ax \, dx = \frac{1}{a} \qquad \left[\cos a\frac{\pi}{2} = 0\right]$$

β) Si $a = 2(2K+1)$: $= 2, 6, 10 \ldots$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin ax \, dx = \frac{2}{a}$$

γ) Si $a = 4K$ $= 0, 4, 8 \ldots$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin ax \, dx = 0$$

3°/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \, dx = I_{m,n}$

Nous pouvons écrire par parties

$$\left[\frac{1}{m+1}\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x \, dx$$

L'expression entre crochets s'annule ~~nt~~ pour $x=0$ et $\frac{\pi}{2}$. Par suite

$$I_{m,n} = \frac{n-1}{m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x \, dx = \frac{n-1}{m+1} I_{m+2,n-2}$$

En continuant on a:

$$I_{m,n} = I_{m+2,n-2} \cdot \frac{n-1}{m+1} = \frac{n-1}{m+1} \cdot \frac{n-3}{m+3} I_{m+4,n-4}$$

En continuant encore ... on aura

$$I_{m,n} = \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots}{(m+1)(m+3)\cdots\cdots} I_{m+n,0}$$

a) Si n est pair:

$$I_{m,n} = \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots 3.1}{(m+1)(m+3)\cdots(m+n-1)} I_{m+n,0}$$

b) Si n est impair:

$$I_{m,n} = \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots 4.2}{(m+1)(m+3)\cdots(m+n-2)} I_{m+n,1}$$

Remarque: Dans cet exemple, on ne peut continuer que jusqu'à ce que n égale 1 au moins. Car pour que l'expression du début entre crochets soit nulle il faut qu'il y a au moins sin et au moins cos

Maintenant trouvons: $I_{m+n,0} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+n} x \, dx$

Posons $m+n = p$ et employons la formule d'intégration par parties:

$$I_{p,0} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \sin x \, dx =$$

$$= \left[-\sin^{p-1}x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (p-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-2}x\cos^2 x \, dx$$

Mais $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ et $[\ ]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$

Donc: $I_{p,0} = (p-1)\left[I_{p-2,0} - I_{p,0}\right]$

d'où $I_{p,0} = \frac{p-1}{p} I_{p-2,0}$

De même $I_{p0} = \frac{(p-1)(p-3)}{p(p-2)} I_{p-4,0}$

En continuant et en distinguant les 2 cas.

a/ p est pair; alors:

$$I_{p,0} = \frac{(p-1)(p-3)\cdots 3.1}{p(p-2)\cdots 4.2} I_{0,0}$$

Mais $I_{0,0} = \frac{\pi}{2}$

d'où $I_{p,0} = \frac{(p-1)(p-3)\cdots 1}{p(p-2)\cdots 4.2} \cdot \frac{\pi}{2}$

b/ p est impair; alors:

$$I_{p,0} = \frac{(p-1)(p-3)\cdots 4.2}{p(p-2)\cdots 5.3} I_{1,0}$$

Mais $I_{1,0} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

et $I_{p,0} = \frac{(p-1)(p-3)\cdots 2}{p(p-2)\cdots 5.3}$

En remplaçant $I_{p,0}$ ~~et I_p~~ par sa valeur nous avons $I_{m,n}$ pour n pair

Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos x \, dx = \mathcal{I}_{p,1}$

ceci est facile car: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \, d(\sin x) =$

$$= \left[\frac{1}{p+1} \sin^{p+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{p+1}$$

et alors on a en définitive facilement les valeurs de: $\mathcal{I}_{m,n}$

<u>Cas particulier</u> $m=0$. alors l'intégrale est: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$

Mais si nous posons: $z = \frac{\pi}{2} - x$

on a pour nouvelles limites: 0 et $\frac{\pi}{2}$

donc: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n z \, dz$

Seulement ici il y a une difficulté:

la limite supérieure est inférieure à la limite inférieure. Mais nous savons que: $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$

et $\int_b^a f(x)\,dx = \left[F(x) \right]_b^a = F(a) - F(b) = -\int_a^b f(x)\,dx$

et en appliquant ceci à dessus:

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n z \, dz = + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n z \, dz$$

intégrale qui est déjà trouvé plus haut: $I_{p,0}$.

Considérons maintenant certains exemples qui peuvent se ramener aux cas précédents:

$$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Posons $x = \sin z$. Alors l'intégrale est $\int_0^1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m z \cos z\, dz}{\cos z} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m z\, dz$

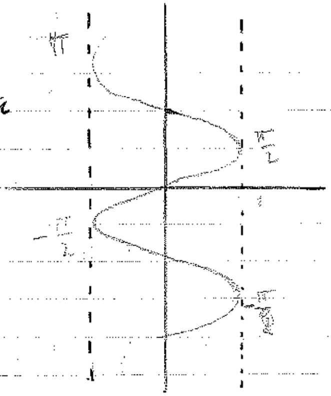
<u>Remarque</u>

Il y a certaines intégrales indéfinies qui ne sont pas de fonctions univoques. Ainsi:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C^{te}$$

et alors l'intégrale définie:

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin b - \arcsin a$$



n'a pas une valeur déterminée car il y a une infinité d'arc sin a et arc sin b

D'ailleurs dans l'expression il devrait y avoir deux signes

Pour le 1er cas les parties en bleu conviennent et pour le second les parties rouges.

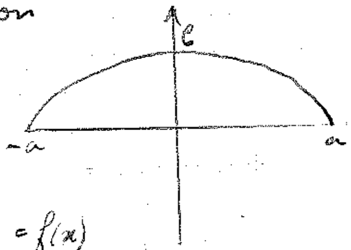
Mais les difficultés ne sont pas encore aplanies car pour une abscisse déterminée il y a des valeurs différentes suivant les valeurs de la constante et toutes ces courbes ont la même dérivée.

Mais dans le cas de l'intégrale définie il faut prendre la même constante pour les a et b en sorte que cette intégrale se rapportera à la même branche.

Exemple : aire de l'ellipse.

Nous savons que l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes est :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$



de là $y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = f(x)$

La moitié de l'aire cherchée est bien :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = b\int_a^b \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

Posons $x = az$ $\quad dx = a\,dz$

l'intégrale a pour nouvelles limites : $\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}$

et alors : $I = ab\int_{-1}^{1} \sqrt{1-z^2}\,dz$

Mais il est facile de voir que $\int \sqrt{1-z^2}\,dz = \frac{z}{2}\sqrt{1-z^2} + \frac{1}{2}\arcsin z + \text{cte}$

et alors $I = ab\left[\frac{z}{2}\sqrt{1-z^2} + \frac{1}{2}\arcsin z\right]_{-1}^{1}$

Mais $\sqrt{1-z^2} = 0$ pour $z = \pm 1$. Alors :

$$I = \frac{ab}{2}\left[\arcsin z\right]_{-1}^{1}$$

En prenant pour arcsin z ~~la~~ sur la branche principale :

$$\left[\arcsin z\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

(On aurait le même résultat en prenant une branche quelconque)

et $\frac{l'aire}{2} = \pi \frac{ab}{2}$

L'aire totale est donc πab

On pourrait de même trouver l'aire d'une tranche de l'ellipse :

$$Aire = ab\left[\frac{z}{2}\sqrt{1-z^2} + \frac{1}{2}\arcsin z\right]_{\frac{x_2}{a}}^{\frac{x_1}{a}}$$

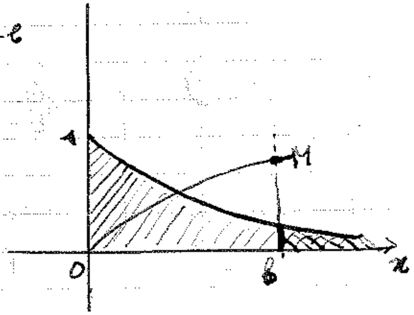
Nous savons que $\int e^{-x}dx = -e^{-x} + cte$

et $\int_0^b e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^b = 1 - e^{-b}$

L'intégrale définie est bien fonction de sa limite supérieure b.

L'aire représentée par cette intégrale est représentée par des hâchures.

Si nous considérons $1-e^{-b}$ comme fonction de b, la courbe représentative passe par l'origine et par M tel que l'ordonnée de M égale $1-e^{-b}$



Si nous faisons tendre b vers l'infini

$$\lim_{b\to\infty}(1-e^{-b}) = 1 \quad \text{et}$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx = 1$$

qui représente toujours l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses.

Dans ce cas on écrit $\lim_{b\to\infty}\int_a^b e^{-x}dx$

de cette manière: $\int_0^\infty e^{-x}dx$

ou plus généralement:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

Cette notion est tout à fait nouvelle car si prenions directement $b-a$ dans le calcul de l'intégrale définie, la valeur serait infinie avec b

Seulement on ne peut pas toujours dire s'il y a toujours une limite.

Ainsi : $\int_a^b \cos x \, dx = \sin b - \sin a$

Mais si b tend vers l'infini on a :

$$\lim_{b \to \infty} (\sin b) = ?$$

On voit bien que la <u>limite n'existe pas</u>

En général : $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$

$$= \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a) = F(\infty) - F(a)$$

si $\lim_{b\to\infty} (F(b)) = F(\infty)$

<u>Autre exemple</u>

$$I = \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \Big[\ln x\Big]_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \ln(x) \to \infty$$

et $I \to \infty$

Ainsi on a trois cas :

1°/ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ a une limite. Cette limite est la valeur cherchée

2°/ $\int_a^\infty f(x)\,dx \to \infty$ et la valeur est supérieure à tous les nombres

3°/ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ n'a pas de sens lorsque la limite de $F(b)$, $b \to \infty$, n'existe pas

On peut considérer les intégrales:

$$I = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx.$$

Posons $x = -z$; $dx = -dz$. Les nouvelles limites sont: $-b$ et $+\infty$ alors:

$$I = -\int_{\infty}^{-b} f(-z)\,dz = \int_{b}^{\infty} f(-z)\,dz$$

qui se ramène aux cas précédents

D'ailleurs on pourrait écrire:

$$I = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{-\infty}^{b} = F(b) - \lim_{-\infty \leftarrow a} F(a)$$

Souvent il est utile de savoir si l'intégrale à limite infinie a une limite ou non sans calculer $F(x)$

Rappelons nous l'interprétation géométrique de l'intégrale définie: l'aire.

Règles:

1°) Pour que la limite existe il faut [mais pas suffisant] que $f(x)$ tende vers 0 pour $x \to \infty$.

On déduit ceci du théorème de la moyenne. Nous avons vu que:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi) \qquad a \leq \xi \leq b$$

Or si on a : $|f(x)| > |f_{min}| > 0$

on aurait : $\int_a^b f(dx) > (b-a)|f_{min}|$

et $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} (b-a)\, f_{min} \longrightarrow \infty$

et ainsi l'intégrale n'a pas de limite. Il faut donc pour que la limite existe que ~~lim~~ $|f_{min}| = 0$.

Cette condition est nécessaire mais pas suffisante ; on peut le voir avec

$$\int_1^{\infty} \frac{c}{x^m}\,dx = \left[c \cdot \frac{x^{-m+1}}{-m+1}\right]_1^{\infty} = \frac{c}{1-m}\left[\lim_{x\to\infty} x^{-m+1} - 1\right]$$

Mais $\lim_{x\to\infty} x^{-m+1}$ dépend de m

et la condition est : $-m+1 < 0$ $\boxed{m > 1}$

pour que cette limite existe et soit égale à 0 et alors :

$$\int_1^{\infty} \frac{c}{x^m}\,dx = -\frac{c}{1-m} = \frac{c}{m-1}$$

Théorème :

L'intégrale $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ est définie si $|f(x)| < \frac{1}{x^n}$ $(n > 1)$ pour x suffisamment grand $[x > X]$.

Nous savons que: ~~lim~~ $\int_a^\infty f(x) = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$.

D'autre part considérons deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ tels que:

$|f| < |g|$. On aura évidemment

$\int_a^b |f(x)|\,dx < \int_a^b |g(x)|\,dx$ car

les sommants de $f(x)$ sont toujours inférieurs à ceux de $g(x)$.

Nous pouvons écrire que:

$I = \int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} F(b) - F(a)$

Pour que I existe il faut que la limite de $F(b)$ existe. Ceci a lieu comme nous l'avons vu, si pour les valeurs de b assez grandes, les valeurs de $F(b)$ aient une différence nulle.

Soit X une abscisse plus grande que b.

Exemples

1°) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{a+x^4}}$

a/ supposons $a>0$

Montrons que cette intégrale définie existe.
Nous pouvons écrire puisque $a>0$

$$x^4+a > x^4$$

$$\sqrt{x^4+a} > x^2$$

ou $$\frac{1}{\sqrt{x^4+a}} < \frac{1}{x^2}$$

soit $$|f(x)| < \frac{1}{x^2}$$

condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale existe

b/ supposons $a<0$

Nous pouvons écrire : $x^4+a > \frac{1}{2}x^4$

ou $$\frac{1}{a+x^4} < \frac{1}{1/2\,x^4} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{a+x^4} < \frac{2}{x^4}$$

soit $$\frac{1}{\sqrt{a+x^4}} < \frac{\sqrt{2}}{x^2}$$

$$|f(x)| < \frac{\sqrt{2}}{x^2}$$

qui est aussi nécessaire et suffisant

D'ailleurs dans ces intégrales pareilles, il n'est pas nécessaire de faire tout ce travail. Il suffit de regarder la plus haute

puissance de x qui est sous le radical
en divisant cette ~~suuf~~ puissance
par 2 et si on a alors pour
x une puissance supérieure à 1
on peut dire que l'intégrale définie
a un sens.

Généralisation des intégrales définies

Nous avions supposé dans la définition
de intégrales définie que la fonction en
question était continue et bornée
dans l'intervalle d'intégration. Nous
avons vu aussi les intégrales définies
à limites infinies: $\int_a^{\infty}$ $\int_{-\infty}^{b}$

Le cas $\int_{-\infty}^{\infty}$ peut se réduire à $\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty}$

Nous pourrons avoir dans les intégrales
définies les cas suivants

$f(x) \longrightarrow \infty$ pour $x = a$ ou $x = b$

Dans ce cas la définition de l'intégrale
définie comme limite d'une
somme n'est plus applicable
car on aurait
évidemment une somme
infinie. Dans ce cas
donc $\int_a^b$ n'a aucun
sens.

Alors on introduit une nouvelle notion.

Si $f(b) = \infty$ on a que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x \to b} \int_a^X f(x)\,dx - F(a)$$

ou $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x \to b} F(x) - F(a)$$

Exemples

1°/ $$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

Cette intégrale n'a pas de sens pour $x = 1$

Mais : $$F(x) = -\frac{1}{x-1}$$

et $$\lim_{x \to 1} \left(-\frac{1}{x-1}\right) = \infty$$

et alors l'intégrale définie n'existe pas.

2°/ $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ discontinue

pour $x = 1$

$$F(x) = -2\sqrt{1-x}$$

$$\lim_{x \to 1} F(x) - 2\sqrt{1-x} = 0$$

et alors $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 0 - (-2) = 2$$

Nous voyons donc qu'il y a trois cas

possible:

1°/ $\lim_{x \to b} F(x)$ existe et alors l'intégrale définie a un sens et est bien déterminée

2°/ $\lim_{x \to b} F(x) = \infty$ l'intégrale définie est supérieure à tout nombre donné.

3°/ $\lim_{x \to b} F(x) = ?$ (fonctions oscillantes par exemple)

L'intégrale définie n'a aucun sens

On peut remarquer ici que le calcul des intégrales des fonctions complexes n'est autre chose qu'un calcul de deux intégrales: partie réelle et partie imaginaire. La partie imaginaire égale d'ailleurs le produit de i par une fonction réelle.

Seulement le cas n'est pas le même quand la variable indépendante est complexe. Nous ne nous occuperons pas de ceci pour le moment.

D'autre part on peut écrire

si pour $x = b$ $f(x) \to \infty$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b \to x} \int_a^x f(x)\,dx$$

ou $= \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$

De même soit $f(x) \to \infty$ pour $x = a$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

On peut réduire ce cas à

$$\int_0^b f(x)\,dx \quad \text{pour } f(0) \to \infty$$

car il est toujours possible de trouver une nouvelle variable telle que pour cette variable la valeur 0 ~~soit~~ donne une discontinuité.

Trouvons : $I = \int_0^b \frac{dx}{x^n} = \lim_{\varepsilon=0} \int_\varepsilon^b \frac{dx}{x^n}$

$$= \lim_{\varepsilon=0} \left| \frac{1}{-n+1} x^{-n+1} \right|_\varepsilon^b =$$

$$= \lim_{\varepsilon=0} \left(b^{-n+1} - \varepsilon^{-n+1} \right) \frac{1}{-n+1}$$

$$= \frac{1}{-n+1} \left(b^{-n+1} - \lim_{\varepsilon=0} \varepsilon^{-n+1} \right)$$

La limite existe si $0 < n < 1$

car nous avons supposé évidemment

que $n > 0$ [sinon $f(x)$ n'est pas discontinu]

et $n \neq 1$ car ce cas est un logarithme

On a donc si ces conditions sont remplies :

$$\int_0^b \frac{dx}{x^n} = \frac{b^{-n+1}}{1-n}$$

En nous basant sur cet exemple nous dirons que :

Si $0 < n < 1$, l'intégrale

$$\int_0^b f(x)\,dx \quad \{f(x) \text{ discontinue pour } x=0\}$$

existe à la condition que :

$$|f(x)| < \frac{1}{x^n}$$

Il n'est pas nécessaire de répéter la démonstration donnée il y a quelque temps.

Exemple.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sin^{\frac{3}{2}} x} \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sin^{3/2} x}$$

Nous ne pouvons pas en général savoir si l'intégrale indéfinie existe mais nous le pouvons pour l'intégrale définie. Nous savons que :

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Nous pouvons dire par exemple

que : $\sin x > \frac{1}{2} x$ pour x assez pet[it]

Alors : $|\sin^{3/2} x| > \left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} x^{3/2}$

De même pour x assez petit :

$$\sin x < \tfrac{3}{2} x$$

ou $\sin^{3/2} x < \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} x^{3/2}$

Alors $|f(x)| = \left|\frac{1}{\sin^{3/2} x}\right| > K \cdot \frac{1}{x^{3/2}}$

et dans ce cas nous l'avons vu, l'intégrale n'existe pas.

Fonctions de plusieurs variables

Nous considérons le cas $u = f(x, y)$ où x et y sont deux variables indépendantes et u ~~est~~ la variable dépendante.

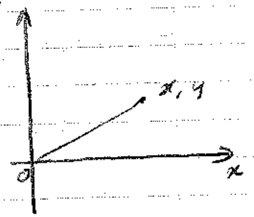
Pour donner une définition de la fonction u il faut lui assigner un domaine et par suite certaines conditions.

Ainsi : $u = \sqrt{x - y}$ n'est définie que pour $x \geq y$

Mais $u = \sqrt{y - x}$ est définie pour $x < y$

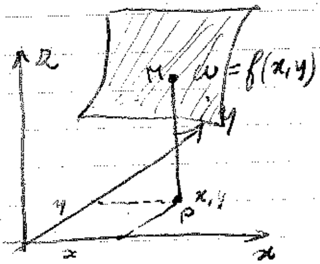
en sorte que nous pouvons donner une définition par plusieurs équations

Signification géométrique d'une fonction de plusieurs variables.



A chaque point du plan de xOy correspond une valeur de u.

Pour avoir une représentation il faut considérer 3 axes de coordonnés



Le point P représente le point $P(x,y)$

et le point M est tel que $\overline{PM} = w = f(x,y)$

Si on donne à x et y toutes les valeurs possibles, le point P décrit le plan x, Oy et le point M décrit une ~~courb~~ surface gauche. Telle est la signification géométrique de $u = f(x,y)$.

Différentiation de fonctions de plusieurs variables. _ Dérivées partielles

Nous avons trouvé les dérivées de fonctions d'une seule variable. Appliquons ceci ~~à~~ aux fonctions de plusieurs variables.

Par exemple soit $u = e^{x+y}$

Si nous considérons y comme une constante nous savons que la dérivée est :

$$\lim_{h=0} \frac{e^{x+h+y} - e^{x+y}}{h}$$

et alors dans le cas générale :

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h}$$

Cette valeur c'est la dérivée partielle de u par rapport à x. On écrit aussi :

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

De même :

$$\lim_{k=0} \frac{f(x, y+k) - f(x,y)}{k} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Dérivée partielle de u par rapport à y

On peut d'ailleurs continuer dans la dérivation partielle et considérer des dérivées partielles successives :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \; ; \; \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \; \text{-----}$$

On emploie aussi les notations f'_x ou f_x et f'_y ou f_y

Pour les dérivées secondes on ~~peut~~

on les désigne par $f_{x,x}$; $f_{y,y}$

Il y a aussi les cas:

$$f_{x,y} \quad , \quad f_{y,x}$$

Exemple:

$f = e^{x+y^2}$

$f_x = e^{x+y^2}$, $f_{x,x} = e^{x+y^2}$,

$f_y = e^{x+y^2} . 2y$; $f_{yy} = e^{x+y^2} . (2y)^2 + e^{x+y^2} . 2$

$f_{x,y} = e^{x+y^2} . 2y$; $f_{yx} = 2y . e^{x+y^2}$

Nous voyons que $f_{x,y} = f_{yx}$. Nous donnerons plus tard une règle générale pour démontrer ce fait

Jusqu'ici nous n'avons introduit que des notions de fonctions d'une seule variable. Maintenant nous traiterons vraiment des fonctions de plusieurs variables.

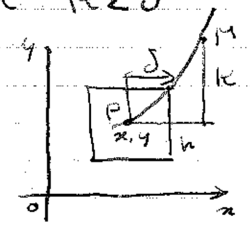
Condition pour que $w = f(x,y)$ soit continue

La fonction $f(x,y)$ est dite continue si la différence $|f(x+h, y+k) - f(x,y)|$ reste constamment inférieure à

une quantité ε aussi petite qu'on veut, il ~~ex~~ pour h et k inférieurs à une valeur δ qui doit être déterminée toujours.

En d'autres termes si $|f(x+h, y+k) - f(x,y)| < ε$

il doit y avoir un nombre δ tel que $h < δ$ et $k < δ$



On peut expliquer ceci géométriquement en disant que les point $x+h$, $y+k$ est toujours à l'intérieur du carré de côté 2δ.

Faisons passer par le point x, y une courbe quelconque mais telle que les points de cette courbe aient pour coordonnées $x+h$, $y+k$.
Si le point M se rapproche du point P, à la limite:

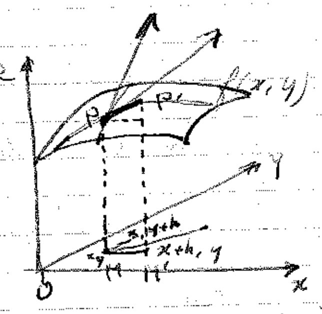
$$\lim_{\substack{h=0 \\ k=0}} f(x+h, y+k) = f(x,y)$$

Si cette condition est remplie la fonction $f(x,y)$ est continue

Conditions de différentiation d'une fonction $u = f(x,y)$

Nous pouvons faire les considérations suivantes à l'aide de la géométrie. Soient les trois axes de coordonnées et $u = f(x,y)$

Voyons la significa=
tion de ~~f(x,y)~~
$\frac{\partial f}{\partial x}$.



Soit M le point x, y

Soit M' un point pris sur la parallèle menée par M à Ox. Pour ce point y est constant et x est x+h

Les points correspondants à M et M' sont P et P' contenus dans un plan vertical parallèle à zox.

D'autre part $\frac{\delta f}{\delta x}$ représente bien

la pente de PP' qui est tangente à la surface gauche à la limite pour h=0
Le plan PMM'P' coupe la courbe suivant une ~~surface~~ courbe et $\frac{\partial f}{\partial x}$ donne la

pente de la tangente au point P à la courbe représentant l'intersection de la surface gauche avec le plan passant par PM et parallèle au plan xOz.

De même on pourrait voir que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est la pente de la tangente à la courbe d'intersection de la surface gauche avec le plan passant par MP et parallèle à zOy.

D'ailleurs une ~~courbe~~ surface gauche a une infinité de tangentes passant par un point de la surface.
Aussi ne peut-on pas par simple considération de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ dire

que la fonction est dérivable car nous l'avons vu le nombre de tangentes à la surface est infini.

Aussi nous devrons considérer les points $x + \alpha h$, $y + \beta k$

où α et β sont constantes rationnelles qui peuvent prendre des valeurs telles que $f(x+\alpha h, y+\beta k)$ soient sur la surface.

Considérons la limite :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+\alpha h, y+\beta h) - f(x, y)}{h}$$

Si pour chaque paire de valeurs de α, et β, cette limite existe, la fonction est dérivable.

En effet, considérons les plans verticaux passant par MP et tournant autour de cette droite. Chaque plan coupe la surface suivant une courbe. Si la limite ci-dessus existe, il y a évidemment une tangente à la courbe de chaque cas et par suite une tangente à la surface gauche.

Voyons maintenant ce que signifie

la limite ci-dessus :

Ajoutons et retranchons $f(x, y+\beta h)$:

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+\alpha h, y+\beta h) - f(x,y)}{h} = \lim_{h=0} \frac{f(x+\alpha h, y+\beta h) - f(x, y+\beta h)}{h}$$

$$+ \frac{f(x, y+\beta h) - f(x,y)}{h}$$

multiplions les deux premiers membres par α et les deux derniers par β et divisons par α et β. On :

$$\lim_{h=0} \alpha \frac{f(x+\alpha h, y+\beta h) - f(x, y+\beta h)}{\alpha h} + \lim_{h=0} \beta \frac{f(x, y+\beta h) - f(x,y)}{\beta h}$$

La première limite est aussi :

$$\alpha \lim_{h=0} f_x(x, y+\beta h)$$

et la seconde : $\alpha \lim_{h=0} f_y(x,y)$

Donc : $L = \alpha \lim_{h=0} f_x(x, y+\beta h) + \beta \lim_{h=0} f_y(x,y)$

$$L = \alpha f'_x(x,y) + \beta f'_y(x,y)$$

Donc $f(x,y)$ est dérivable au point x, y si les deux dérivées partielles existent en ce point et si au moins l'une d'elles est continue en ce point.

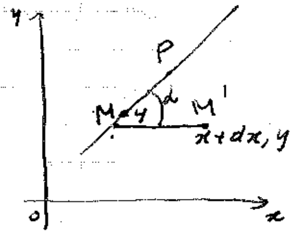
Dans ce cas c'est f'_x qui doit l'être

mais en retranchant $f(x+\lambda h, y)$ de $f(x+\lambda h, y+\rho h)$ on arriverait à montrer que f'_y doit être continue. Il suffit donc que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial y}$$ soient au moins

continues.

Représentant ceci dans un système à deux dimensions..



Soit M le point x, y
et M' un point $x+dx, y$

Quand M' se rapproche indéfiniment de M, dx tends vers 0 et

$$\lim \frac{f(x+dx, y) - f(x, y)}{dx} = f_x$$

De même on peut voir que :

$$\lim \frac{f(x, y+dy) - f(x, y)}{dy} = f_y$$

Soit une direction qui fasse avec Ox un angle α et passe par M

Soit sur cette direction un point P tel que $\overline{MP} = l$

~~La valeur~~ coordonnées de P sont :

$x + l\cos\alpha$, $y + l\sin\alpha$

Considérons la limite suivante :

$$\lim_{l=0} \frac{f(x+l\cos\alpha,\ y+l\sin\alpha) - f(x,y)}{l}$$

Cette limite existe nous l'avons vu pourvu que f_x ou f_y soient continues au point x, y

Par suite

$$\lim = \cos\alpha .\ f_x + \sin\alpha\ f_y$$

Ainsi nous avons montré donc que la fonction $f(x,y)$ possède une dérivée dans la direction de Ox, une autre dans la direction de Oy et une dérivée dans n'importe quelle direction.

Donc une fonction de deux variables indépendantes possède une infinité de dérivées du premier ordre

Remarquons que la connaissance de f_x et de f_y suffit pour trouver chacune de ces dérivées car nous avons bien vu que chacune égale.

$$\cos\alpha\ f_x + \sin\alpha\ f_y$$

ou $$\frac{\partial f}{\partial l} = \cos\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\alpha \frac{\partial f}{\partial y}$$

Nous pouvons donc donner la dérivée au point P par une fonction de α, puisque pour chaque valeur de α cette dérivée change.

Une telle fonction est définie par

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \cos\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\alpha \frac{\partial f}{\partial y}$$

<u>Etudions cette fonction</u>

1° valeurs pour lesquelles $\frac{\partial f}{\partial l}$ est nulle.

On a: $\cos\alpha_0 \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\alpha_0 \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

ou $tg\alpha_0 = - \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$

$tg\alpha$ est définie pour toutes les valeurs excepté pour

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Dans ce cas on a:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \cos\alpha_0 \frac{\partial f}{\partial x}$$ qui s'annule

pour $\alpha_0 = (2K+1)\frac{\pi}{2}$

(Le cas où $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ donne pour $\frac{\partial f}{\partial l}$ une valeur pour toutes les valeurs de α)

2) Maximum de cette fonction

Dérivons d'après α :

$$- \sin\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \cos\alpha \frac{\partial f}{\partial y}$$

qui s'annule pour

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{f_y}{f_x}$$

Nous pouvons voir que α_0 et α_1 sont deux directions perpendiculaires

Trouvons la valeur du maximum.

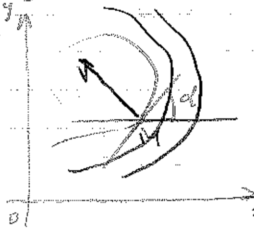
$$\sin\alpha_1 = \frac{f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} \quad \text{et} \quad \cos\alpha_1 = \frac{f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}$$

$$\text{et} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)_{\alpha=\alpha_1} = \frac{f_x^2 + f_y^2}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$

<u>Remarque</u>

Il faut remarquer le signe du radical. Il est vrai que pour une valeur de la tangente, il y a deux valeurs de l'angles dont la différence égale π et les sin et cos sont changés de signe. En sorte que si les deux valeurs de α sont opposés, (α et $\alpha + \pi$) la dérivée ne change pas de valeur mais change de signe

Essayons de donner une représentation graphique dans un plan de la fonction $f(x,y)$



Il y a évidemment dans le plan xOy des points x, y pour lesquels la valeur de $f(x,y)$ ne change pas

ces points sont sur une courbe dite ligne de niveau.

Montrons que la pente de la tangente de la courbe de niveau, en M est égale à $tg\,\alpha_0$

En effet si je me déplace dans la direction de la tangente je rencontre un autre point, tel que $c = f(x', y') = f(x, y) = c$

et donc $\frac{\partial f}{\partial l} = 0$

La direction $\alpha_1 \perp \alpha_0$ donne le maximum de $\frac{\partial f}{\partial l}$, on peut se l'expliquer si l'on se dit que cette direction est celle permettant de passer le plus vite possible d'une ligne de niveau à celle toute proche. Soient deux lignes de niveau représentant deux valeurs de $f(x,y)$. On aura comme différence de valeurs Δf et $\frac{\partial f}{\partial l} = \lim \frac{\Delta f}{l}$ ~~donc~~ pour que $\frac{\partial f}{\partial l}$ max il faut $l = \min$ donc $\alpha_1 \perp \alpha_0$.

Pour aller donc le plus vite possible d'une ligne de niveau à une autre il faut prendre la direction α_1. On appelle la grandeur correspondante le gradient de f. $\sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ grad f

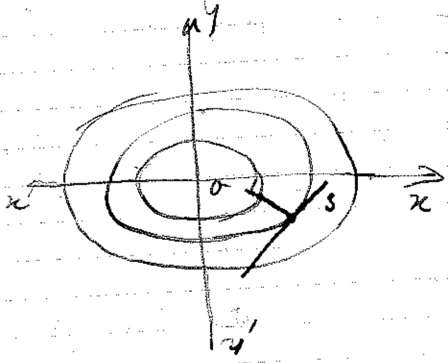
exemple

$$w = f(x,y) = ax^2+by^2+c$$

$$f_x = 2ax$$

$$f_y = 2bx$$

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = -\frac{a}{b}\frac{x}{y}$$



Les courbes ax^2+by^2+c sont en général des coniques.

Si $ax^2+by^2+c = c_1$ par exemple et que $a>0,\ b>0 \quad c_1>0$

ce sont des ellipses qui représentent une coupe de la surface gauche représentée par w

On peut déterminer α_0 et α_1 et trouver ainsi les points où la pente est maximum

---

Calcul de f_x et f_y en fonction de $\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)$ et α_0

On a bien: $$0 = f_x \cos\alpha_0 + f_y \sin\alpha_0 \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_m = f_x \cos\alpha_1 + f_y \sin\alpha_1$$

Mais $$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\pi}{2}$$

Par suite $\frac{\partial f}{\partial n} = -f_x \sin\alpha_0 + f_y \cos\alpha_0$ (2)

en tirant la valeur de f_x et f_y de (1) et (2)

On a:

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial n} \cos\alpha_0$$

$$f_x = -\frac{\partial f}{\partial n} \sin\alpha_0$$

et l'équation générale est

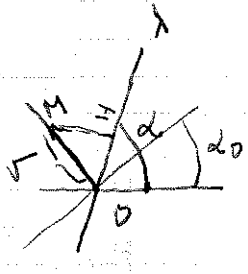
$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial n}\left[\sin\alpha\cos\alpha_0 - \cos\alpha\sin\alpha_0\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial n}\sin(\alpha-\alpha_0) = \sqrt{f_x^2+f_y^2}\sin(\alpha-\alpha_0)$$

Mais comme $\alpha_0 = \alpha_1 - \frac{\pi}{2}$

On a: $\frac{\partial f}{\partial l} = \sqrt{f_x^2+f_y^2}\cos(\alpha-\alpha_1)$

Nous voyons d'ici un moyen facile de calculer $\frac{\partial f}{\partial l}$ pour une direction α quelconque.



Il suffit de porter dans la direction α_1 $|\vec{OM}| = |V|$

et d'abaisser $MH \perp O\lambda$ on a alors $\frac{\partial f}{\partial l} = \overline{OH}$.

Donc la dérivée dans une direction quelconque est égale à la composante du vecteur $\vec{v} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ $\overrightarrow{1}_{tg\alpha = \frac{f_y}{f_x}}$ dans cette direction.

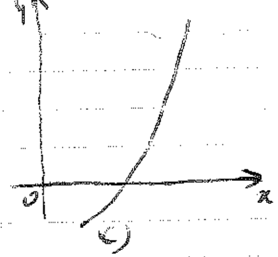
Le vecteur $\vec{v} = f_x \vec{1}_x + f_y \vec{1}_y$ est le

gradian de f.

Etudions le problème suivant.

Soit une fonction $u = f(x, y)$ définie pour chaque valeur de x et y.

Soit une courbe (C) dans le plan xoy. Proposons nous d'étudier la fonction f(x, y) sur la courbe donnée.



Soient $x = \varphi(t)$
$y = \psi(t)$

les équations paramétriques de la courbe (C).

Alors $u = f[x(t), y(t)]$

Nous voyons donc que la fonction u est donc seulement fonction de t.

Proposons nous de trouver $\frac{du}{dt}$

Rappelons nous que : $\frac{du}{dt} = \lim_{h=0} \frac{f[x(t+h),\, y(t+h)] - f[x(t),y(t)]}{h}$

d'après la définition générale.

Supposons que les ~~dérivées~~ fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ soient dérivables.

D'après le théorème des accroissements finis on a :

$$x(t+h) = \varphi(t+h) = x(t) + h[\varphi'(t) + \varepsilon_1]$$

$$y(t+h) \;-\;- = y(t) + h[\psi'(t) + \varepsilon_2]$$

alors on a que si l'on pose $\varphi'(t) + \varepsilon_1 = \alpha$ et $\psi'(t) + \varepsilon_2 = \beta$ d'après la formule générale :

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+\alpha h,\, y+\beta h) - f(x,y)}{h} = \alpha f_x + \beta f_y$$

Donc $\frac{du}{dt} = \lim_{h=0} \left[(\varphi' + \varepsilon_1) f_x + (\psi' + \varepsilon_2) f_y \right]$

$$= \varphi' f_x + \psi' f_y$$

car ε_1 et ε_2 tendent vers 0 avec h

Donc :

$$\frac{du}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Ce théorème c'est le théorème des dérivées totales

=

On exprime souvent ce théorème

dans la forme:

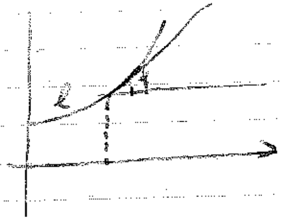
$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

La différentielle totale de f qui est une fonction composée de t est égale à la dérivée partielle de f par rapport à x multipliée par la différentielle de x plus la dérivée partielle de f par rapport à y multipliée par la différentielle de y

On peut envisager un cas spécial de f en donnant une désignation particulière à f.

Il y a plusieurs fonctions φ et ψ pour x et y mais on peut choisir t de telle sorte que la courbe reste la même.

Supposons donc que ce paramètre t représente la longueur de l'arc de la courbe.



D'après ci-dessus:

$$\frac{df}{dl} = f_x \frac{dx}{dl} + f_y \frac{dy}{dl}$$

Mais en se référant à la géométrie différentielle on peut dire que si α

est l' angle de pente de la tangente au point x, y

$$\frac{dx}{dl} = \cos\alpha \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{dx} = \sin\alpha$$

Par suite $\frac{df}{dl} = f_x \cos\alpha + f_y \sin\alpha$

Rappelons nous que nous avions trouvé une expression identique pour $\frac{\partial f}{\partial l}$:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = f_x \cos\alpha + f_y \sin\alpha$$

Donc dans le cas où les points x et y sont sur une courbe donnée, la dérivée totale égale la dérivée partielle.

Exemple

$f = ax^2 + by^3 + cxy$

$f_x = 2ax + cy \quad ; \quad f_y = 3by^2 + cx$

Considérons le point $x = 0, y = 0$ en ce point $f_x = 0 \quad f_y = 0$

Supposons que x et y soient sur la parabole

$x = t$
$y = t^2$

La dérivée totale est

$$\frac{df}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt}$$

$$= (2ax + ey)\, 1 + (3by^2 + ex) \cdot 2t$$

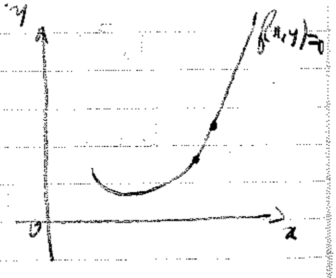
$$\frac{df}{dt} = 2at + et^2 + (3bt^4 + et)\, 2t$$

Fonctions implicites

Quand y est donné en fonction de x [$y = x$ $y = e^x$ ...] on dit que y est une fonction ~~ex~~plicite

Quand y n'est pas donné en fonction de x on dit que la fonction implicite.

Dans le cas des fonctions de deux variables indépendantes si nous faisons $u = 0$ nous avons une fonction implicite: $f(x, y) = 0$



La courbe représentative de $f(x, y)$ sera contenue dans le plan xoy. car $u = 0$

Soient $x = \varphi(t)$
$y = \psi(t)$

les équations paramétriques de $f(x, y) = 0$

en appliquant le théorème de la dérivée totale :

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Mais $\frac{du}{dt} = 0$ car $u = 0$

et si nous prenons comme paramètre x

on a : $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

D'où $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$

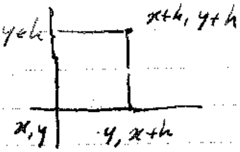
Dérivées d'ordre supérieur à 1

Nous savons qu'il y a une infinité de dérivées premières d'une fonction $u = f(x, y)$
Mais toutes ces dérivées sont connues si l'on connaît f_x et f_y et la direction.
Nous avions supposé que f_x et f_y était au moins l'une d'elles continues.
Nous supposerons que ce sont aussi des fonctions dérivables.

<u>Théorème de Young et de Schwartz</u>

Si f_x et f_y sont dérivables autour d'un point x, y on a toujours : $\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}$

En d'autres termes : $f_{xy} = f_{yx}$



Soit Δ déterminé par l'égalité suivante:

$$\Delta = f(x+h, y+h) - f(x+h, y) - f(x, y+h) + f(x, y) \qquad (1)$$

Soient: $\varphi(x) = f(x, y+h) - f(x, y) \qquad (2)$

$$\psi(y) = f(x+h, y) - f(x, y) \qquad (3)$$

On peut voir facilement que

$$\Delta = \varphi(x+h) - \varphi(x) = \psi(y+h) - \psi(y)$$

Mais $\varphi(x)$ est une fonction dérivable car $f(x, y+h) - f(x, y)$ sont des fonctions dérivables d'après notre supposition.

Par suite: $\varphi(x+h) - \varphi(x) = h[\varphi'(x) + \varepsilon_1]$

d'après le théorème d'accroissements finis

Mais $\varphi'(x) = h\left[f_x(x, y+h) - f_x(x, y) + \varepsilon_1\right]$

[d'après (2)]

Mais comme nous avons supposé f_x et f_y dérivables nous pouvons appliquer le théorème d'accroissements finis pour $f_x(x, y+h) - f_x(x, y)$ par rapport à y.

$$f_x(x, y+h) - f_x(x, y) = h\left[f_{xy}(x, y) + \varepsilon_2\right]$$

Alors:

$$\Delta = \varphi(x+h) - \varphi(x) = h\left[h\left\{f_{xy}(x,y) + \varepsilon_2\right\} + \varepsilon_1\right]$$

$$= h^2 f_{xy} + h^2\varepsilon_2 + h\varepsilon_1$$

De même nous savons que $\Delta = \psi(y+h) - \psi(y)$

Appliquons le même raisonnement à cette valeur.

$$\Delta = \psi(y+h) - \psi(y) = h\left[\psi'(y) + \varepsilon_3\right] = h\left[f_y(x+h,y) - f_y(x,y) + \varepsilon_3\right]$$

$$\Delta = h\left[h\left\{f_{yx}(x,y) + \varepsilon_4\right\} + \varepsilon_3\right]$$

On a donc: $h\left[h\left\{f_{yx}(x,y) + \varepsilon_4\right\} + \varepsilon_3\right] = h\left[h\left\{f_{xy} + \varepsilon_2\right\} + \varepsilon_1\right]$

ou $\quad h\left[f_{yx} + \varepsilon_4\right] + \varepsilon_3 = h\left[f_{xy} + \varepsilon_2\right] + \varepsilon_1$

Voilà une autre démonstration

Soit $\Delta = f(x+h, y+h) - f(x+h, y) - [f(x, y+h) - f(x,y)]$

qui représente l'accroissement total de $f(x,y)$ si l'on change x et y en $x+h$, $y+h$

D'après le théorème de la moyenne:

$$f(x+h, y+h) - f(x+h, y) = h f_y(x+h, y+\theta_1 h] \quad - (x+h \text{ cte}, y \text{ varie})$$

$$f(x, y+h) - f(x,y) = h f_y(x, y+\theta_1 h) \quad - x \text{ cons. } y \text{ varie}$$

$$\text{Mais } \Delta = h\left[f_y(x+h, y+\theta_1 h) - f_y(x, y+\theta_1 h)\right] = \quad y+\theta h \text{ cte}, x \text{ varie}$$

$$\Delta = h^2 f_{yx}(x+\theta_2 h, y+\theta_1 h)$$

Prenons les accroissements en ordre inverse; c'est-à-dire en écrivant.

$$\Delta = f(x+h, y+h) - f(x, y+h) - [f(x+h, y) - f(x,y)]$$

$$\Delta = h\left[f_x(x+\theta_3 h, y+h) - f_x(x+\theta_3 h, y)\right]$$

$$\Delta = h^2 f_{xy}(x+\theta_3 h, y+\theta_4 h)$$

En égalant les deux valeurs de Δ, il vient.

$$h^2 f_{yx}(x+\theta_2 h, y+\theta_1 h) = h^2 f_{xy}(x+\theta_3 h, y+\theta_4 h)$$

ou $f_{yx}(x+\theta_2 h, y+\theta_1 h) = f_{xy}(x+\theta_3 h, y+\theta_4 h)$

En prenant la limite des 2 membres quand h tend vers 0 on a:

$$f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y)$$

Remarque

Dans toute la démonstration nous avons supposé que la fonction $f(x,y)$ et les dérivées partielles en x et y étaient des fonctions continues et dérivables.

Application Importante

Rappelons ce fait qu'il existe toujours une fonction dont on connait la différentielle.

Ainsi: $df = f'(x)\, dx$

$dP = p(x)\, dx$ ou $P = \int px\, dx$

pourvu que l'on ne traite que d'une seule variable.

D'autre part rappelons nous que dans les différentielles totales

$df = f_x\, dx + f_y\, dy$

Pouvons nous faire ici une analogie

avec l'expression précédente et se demander s'il existe toujours une fonction f dont la différentielle totale soit

$$p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy$$

Nous disons en général que non car si cela était possible il faudrait que p et q ~~soient~~ fussent respectivement les dérivées l'une par rapport à x et l'autre par rapport à y d'une même fonction F(x,y). Il faut donc que p et q ne soient pas indépendants l'un de l'autre et que si l'on prend: $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$

on ait deux expressions égales ou

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

cette condition est nécessaire et suffisante.

Ainsi il n'y a pas de fonction telle que $dF = x^2 y\,dx + x^3 y^3\,dy$

car $\frac{\partial (x^2 y)}{\partial y} \neq \frac{\partial (x^3 y^3)}{\partial x}$

Mais par contre

on peut trouver que: $df = x^2 y\,dx + \frac{x^3}{3}\,dy$

car dans ce cas:

$$\frac{\partial (x^2 y)}{\partial y} = \frac{\partial \left(\frac{x^3}{3}\right)}{\partial x} = x^2$$

Formule de Taylor pour deux variables indépendantes

Dans le cas d'une seule variable nous savions que par exemple:

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h\varphi'(x) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x) \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{n-1}(x) + \frac{h^n}{n!}\varphi^n(x+\theta h)$$

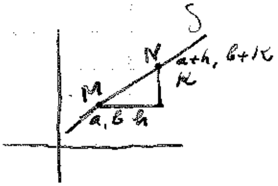
$$0 < \theta < 1$$

Cherchons maintenant la différence:

$$f(x+h, y+k) - f(x,y) \quad \text{ou} \quad f(a+h, b+k) - f(a,b)$$

Nous pouvons réduire cette fonction de deux variables à une seule variable

c'est-à-dire à considérer les points de la fonction sur la droite S



Les coordonnées paramétriques de la droite S sont:

$$x = a + ht$$
$$y = b + kt$$

D'ailleurs pour $t=0$ $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$

pour $t=1$ $\begin{cases} x = a+h \\ y = b+k \end{cases}$

ainsi pour $0 \leq t \leq 1$ le point va de M en N

Si x et y sont fonction de t

$f(x,y) = \varphi(t)$

et la différence $f(a+h, b+k) - f(a,b) = \varphi(1) - \varphi(0)$

En appliquant la formule de Maclaurin on a :

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + \frac{1}{3!}\varphi'''(0) \dots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(\theta)$$

$$0 < \theta < 1$$

Il s'agit maintenant de calculer $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$ ...

$$\varphi'(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d f(x,y)}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt}$$

en appliquant la dérivée totale

Mais $\frac{dx}{dt} = h$ et $\frac{dy}{dt} = k$

Par suite $\varphi'(t) = h f_x + k f_y$

ou $$\boxed{\varphi'(t) = h \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + k \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}$$

Faisons $t = 0$ ou : $x = a$, $y = b$

$$\varphi'(0) = h \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} + k \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}$$

$$\varphi''(t) = \frac{d\varphi'}{dt} = h \frac{d f_x(x,y)}{dt} + k \frac{d f_y(x,y)}{dt}$$

ou en appliquant les dérivées totales:

$$\varphi''(t) = h\left[f_{x^2}(x,y).h + f_{xy}(x,y).k\right]$$

$$+k\left[f_{y^2}(x,y).h + f_{yx}(x,y).k\right]$$

~~et $\varphi''(0)=$~~ Mais $f_{yx} = f_{xy}$

et en faisant $t=0$ on a:

$$\varphi''(0) = h^2 f_{x^2}(a,b) + 2hk f_{xy}(a,b) + k^2 f_{y^2}(a,b)$$

Pour pouvoir plus facilement écrire on emploie les abréviations suivantes.

Nous avons trouvé que $\varphi'(t) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}$

comme ce sont deux opérations par rapport à f, on écrit ceci de cette manière

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f$$

De même pour $\varphi''(t)$ on peut écrire:

$$\varphi''(t) = \left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f$$

on écrit ceci d'une manière symbolique:

$$\varphi''(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f$$

à la condition que l'on entende par le symbole $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ la deuxième dérivée

Cette forme est dite aussi puissance symbolique

D'une manière générale:

$$\varphi^{(\nu)}(t) = \frac{d\varphi^{(\nu-1)}}{dt} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi^{(\nu-1)}$$

Ainsi pour passer d'une dérivée à l'autre il faut opérer sur la dérivée d'ordre immédiatement inférieur puis opérer par $h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}$

en sorte que l'on peut écrire la formule générale:

$$\varphi^{\nu}(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi^{(\nu-1)} + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\varphi^{(\nu-2)} \cdots$$

ou $\varphi^{\nu}(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\nu} f$

et nous pouvons écrire maintenant la formule de Taylor pour une fonction de deux variables indépendantes:

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b) + \frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)$$

$$\cdots + \frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} f(a,b)$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n} f(a+\theta h, b+\theta k)$$

Ici θ est le même pour h et k car on a une seule valeur $t = \theta$ intermédiaire entre 0 et 1

Remarque

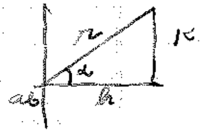
Dans l'expression de la formule de Taylor on calcule d'abord les dérivées partielles et on remplace ensuite x par a et y par b

Si $h = k$, on a :

$$f(a+h, b+h) = f(a,b) \ldots + \frac{h^\nu}{\nu!}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^\nu f(a,b) \ldots$$

car les expressions symboliques sont homogènes par rapport à h et k

En posant $h = r\cos\alpha$ et $k = r\sin\alpha$ on peut donner au théorème de Taylor une autre expression



On peut voir que:
$r^2 = h^2 + k^2$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k}{h}$$

On a donc:

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = f(a + r\cos\alpha, b + r\sin\alpha) - f(a,b)$$

$$= r\left(\cos\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha \frac{\partial}{\partial y}\right) f + \ldots \frac{r^\nu}{\nu!}\left(\cos\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha \frac{\partial}{\partial y}\right)^\nu f \ldots$$

On voit ici plus facilement l'analogie avec le théorème de Taylor d'une seule variable : r

Applications

Formule de Taylor de 1er ordre.

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = r\left[\cos\alpha \frac{\partial f}{\partial x}(a + r\theta\cos\alpha, b + r\theta\sin\alpha) + \sin\alpha \frac{\partial f}{\partial y}(a + r\theta\cos\alpha, b + r\theta\sin\alpha)\right.$$

θ étant compris entre 0 et 1

$r\theta\sin\alpha$ et $r\theta\cos\alpha$ sont les coordonnées d'un point intermédiaire entre a, b et $a+h, b+k$

D'autre part on peut voir facilement que l'expression entre crochets est la dérivée dans la direction α au point intermédiaire

D'ailleurs on aurait pu trouver l'expression de cette équation par le théorème de Taylor d'une seule variable en considérant les points de r dépendants d'une seule variable.

Maximums et minimums d'une fonction de deux variables

Soit une fonction $f(x, y)$. Nous cherchons un point de cette fonction pour lequel la fonction au voisinage de ce point a une valeur supérieure ou inférieure à celle du point.

On exprime ceci pour un maximum par exemple, par

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) < 0 \quad \text{pour}$$

les valeurs de h et k aussi petites c'est-à-dire inférieures à un nombre ε, ε étant aussi petit qu'on veut

On peut trouver des conditions nécessaires pour cette inégalité.
1° elle doit être vérifiée quand $k \to 0$, $h \neq 0$
2° " " " " " $h \to 0$, $k \neq 0$

c'est-à-dire que la fonction $f(x, y)$ doit être un maximum soit pour x seul, soit pour y seul.

Il s'ensuit que l'on doit avoir nécessairement :

$$f_x = 0 \quad \text{et} \quad f_y = 0$$

On peut le voir facilement d'ailleurs en se rappelant que la dérivée au point x, y dans une direction quelconque

est : $\cos\alpha f_x + \sin\alpha f_y$ qui s'annule bien pour $f_x = 0$ et $f_y = 0$

Cette condition n'est pas suffisante

il faut aussi pour x et y soient des maximums :

$$f_{x^2} < 0 \quad \text{et} \quad f_{y^2} < 0$$

Seulement ce n'est pas encore fini car on ne sait rien dans les autres directions.

Recourons au théorème de Taylor en se rappelant que $f_x = 0$ et $f_y = 0$

$$f(x+h, y+k) - f(x,y) = \frac{r^2}{2}\left[f_{x^2} \cos^2\alpha + 2 f_{xy} \sin\alpha\cos\alpha + f_{y^2} \sin^2\alpha \right]$$

$$+ \frac{r^3}{6}\left[f_{xxx}(x+\theta h, y+\theta k) \cos^3\alpha - \dots \right]$$

en prenant comme point intermédiaire au delà de r^2.

Mettons $\frac{r^2}{2}$ en facteur commun et

remplaçons le second crochet par ε qui renferme $\frac{r}{3}$ en facteur

et qui s'annule pour $r \to 0$

Alors

$$f(x+h, y+k) - f(x,y) = \frac{r^2}{2}\left[f_{x^2} \cos^2\alpha + 2 f_{xy} \sin\alpha\cos\alpha + f_{y^2} \sin^2\alpha + \varepsilon \right]$$

si la partie en crochets est toujours négative pour chaque α la condition

$f(x+h, y+k) - f(x,y) < 0$ est remplie

car $r^2 > 0$ et ε est aussi petit qu'on veut puisque l'on peut toujours diminuer r tel que ε soit très petit.

Il faut donc que $f_{x^2} \cos^2\alpha + 2 f_{xy} \sin\alpha\cos\alpha + f_{y^2} \sin^2\alpha < 0$

Sous quelle condition cette inégalité a lieu?

Il faut d'abord $f_{x^2} < 0$ car si $\alpha = 0$

il reste $f_{x^2} < 0$

De même si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ on trouve

$$f_{y^2} < 0$$

Ceci ne suffit pas car il y a les aussi les points intermediaires

D'autre part la fonction donnée $f_{x^2} \cos^2$ ———

est fonction de α. Pour que l'expression ~~soit~~ toujours négative il suffit qu'elle ne s'annule jamais car

$$f_{x^2} \text{ et } f_{y^2} \text{ sont } < 0$$

Cherchons les valeurs de α pour lesquelles l'expression s'annule. En divisant par $f_{y^2} \cos^2\alpha$ on a :

$$tg^2\alpha + 2\frac{f_{xy}}{f_{y^2}} tg\,\alpha + \frac{f_{x^2}}{f_{y^2}} = 0$$

Cette expression ne s'annule jamais

si $\Delta < 0$ ou :

$$\Delta = \frac{f^2_{xy}}{f^2_{y^2}} - \frac{f_{x^2}}{f_{y^2}} < 0$$

soit ~~ou~~

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0}$$

Cours d'Analyse
[IIème Année]
Prof. Von Mises

IIe Volume
(Cahier)

2de Année

28 - 11 - 1934

Chapitre II.

Equations différentielles

§ 1. Equations du premier ordre

Exemples

L'équation différentielle la plus simple est :

$$y' = f(x)$$

où y' représente la dérivée par rapport à x d'une certaine fonction $y(x)$ qu'il s'agit de déterminer.

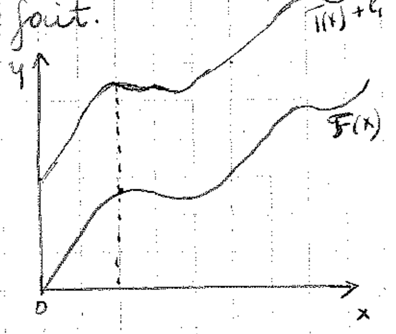
Si nous supposons que $f(x)$ est une fonction intégrable donnée par une combinaison de fonctions élémentaires nous avons:

$$y(x) = \int_0^x f(x)\,dx + c = \int_0^x f(\xi)\,d\xi + c = \mathcal{F}(x) + C$$

c est une constante.

Nous voyons qu'il existe un nombre infini de solutions pour l'équation ci-dessus. Toutes ces solutions diffèrent d'une constante.

On peut interpréter géométriquement ce fait.



Suppons $c=0$. Alors $y(x) = \mathcal{F}(x)$

qui s'annule pour $x=0$ car on a

$$\mathcal{F}(0) = \int_0^0 f(\xi)\,d(\xi) = 0$$

Ainsi la courbe représentative de $\mathcal{F}(x)$ passe par le point O.

Supposons $c = c_1$. Dans ce cas: $y_1(x) = \mathcal{F}(x) + c_1$

Nous voyons que $y_1(x)$ ne diffère de $y(x)$ que par une constante c_1 et pour construire $y_1(x)$ il suffit d'ajouter c_1 aux ordonnées de $\mathcal{F}(x)$.

Ainsi les courbes $y(x)$ sont une translation de $\mathcal{F}(x)$ parallèlement à elle même.

L'ensemble de ces courbes est dit un faisceau ou une famille de courbes.

Soit un autre exemple :

$$y' = 2xy^2$$

On ne peut pas intégrer immédiatement car il y a y^2 dans le second membre. Seulement en divisant par y^2 on a :

$$\frac{y'}{y^2} = 2x$$

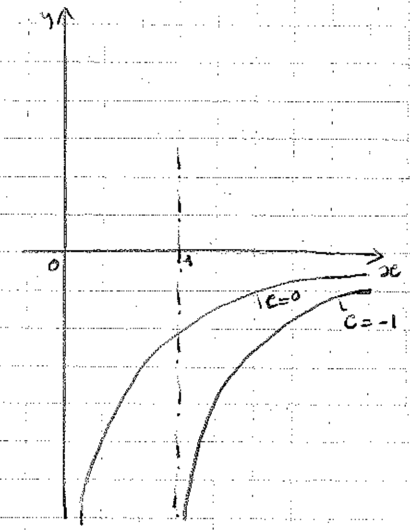
Or : $\frac{y'}{y^2} = \frac{d\left(\frac{1}{y}\right)}{dx}$ et $2x = \frac{d}{dx}(x^2)$

Nous avons donc

$$\frac{d\left(\frac{1}{y}\right)}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C$$

$$y = -\frac{1}{x^2 + C}$$



Si on construit la courbe $y = -\frac{1}{x^2}$ qui est une hyperbole équilatère d'asymptotes Ox et Oy, on peut facilement comparer les courbes $y = -\frac{1}{x^2+C}$ qui ont une forme spéciale pour $C \gtrless 0$

Seulement si par exemple on donne un point par où doit passer la courbe on a une seule courbe qui passe par ce point.

Cas général d'une équation différentielle du 1^er^ ordre

On appelle équation différentielle du premier ordre une relation $F(x, y, y') = 0$ entre la variable x, la fonction inconnue y de cette variable et sa dérivée y'.

Comme on a une seule variable indépendante on dit que cette équation est simple ou ordinaire ou encore totale car on prend la dérivée totale.

Dans le cas de plusieurs variables :

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

on a une équation partielle de premier ordre.

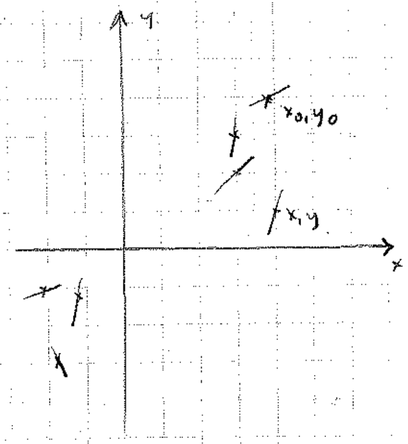
Supposons que par des méthodes algébriques connues on ait trouvé :

$$y' = f(x, y)$$

c'est-à-dire sous une forme explicite.

Signification géométrique de la relation $y' = f(x,y)$

Prenons un point x, y quelconque dans le plan x, y.



Si nous portons ces valeurs dans la relation ci-dessus nous trouvons une valeur de y'.
Or y' par définition est la pente de la tangente au point x, y à la fonction y.
Ainsi dans le plan x, y nous avons des directions déterminées. On dit que $y' = f(x,y)$ représente un champ de directions dans le plan x, y.

Pour trouver la solution y il faut grouper ces points de manière à déterminer une courbe telle qu'en chaque point x, y la tangente ait pour direction l'angle dont la tangente est donnée par y'.

Ainsi quand on a un point x_0, y_0 on peut trouver une seule solution de l'équation. Seulement il faut certaines conditions. On a alors le théorème ci-dessous :

Théorème

L'équation $y' = f(x,y)$ a une solution et une seule passant par le point x_0, y_0 dans le cas où :

1° $f(x,y)$ est une fonction continue

2° Si la condition de Lipschitz par rapport à y qui est :

$$|f(x,y) - f(x,y_1)| \leq M . |(y - y_1|$$

est remplie

Cette dernière condition demande l'existence d'un nombre positif M tel que pour deux solutions y et y_1 différentes on ait l'inégalité :

$$\frac{|f(x,y) - f(x,y_1)|}{|y - y_1|} \leq M$$

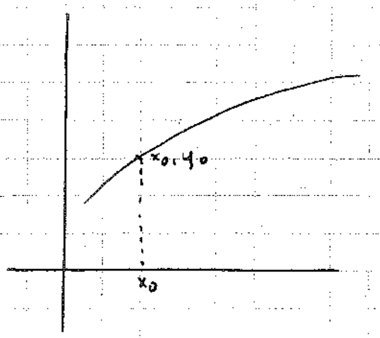
Il est évident que si $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe et $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq M$ la condition ci-dessus est réalisée puisque :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \lim_{y_1 \to y} \frac{|f(x,y) - f(x,y_1)|}{|y - y_1|}$$

Ainsi la condition de Lipschitz n'implique que l'existe de $\frac{\partial f}{\partial y}$. Elle ne nécessite pas la

condition que $f(x,y)$ soit dérivable par rapport à x.

Démonstration



Afin de démontrer la proposition nous allons indiquer la solution $y(x)$ cherchée.
A cet effet nous montrerons que $y(x)$ est la limite d'une certaine serie, que cette série est uniformement convergente et que $y(x)$ est la seule solution.

I.– $y(x)$ est la limite d'une série.

En effet nous pouvons écrire toujours:

$$y(x) = \int^{x} f[x, y(x)]\, dx + C$$

Il est évident que nous n'avons rien trouvé de nouveau; ce n'est qu'une autre expression de l'équation

Remarquons que puisque la courbe passe par le point $x_0\ y_0$ il faut que cette relation soit verifiée ci-dessus. Il est facile de voir qu'en tenant compte de cette condition $y(x)$ prend la forme:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, y(x)]\, dx$$

car pour $x = x_0$ $y(x)$ prend bien la valeur y_0

Remarquons toujours que la forme ci-dessus n'est encore qu'une autre expression de l'équation différentielle mais plus particulière cette fois

Soit d'autre part la fonction $y_1(x)$ définie par la relation:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} [\, f(x, y_0)\ dx$$

Comme la fonction $f(x,y)$ est continue son intégrale existe aussi et elle est continue. Il s'ensuit que $y_1(x)$ est continue. Similairement nous avons les fonctions:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, y_1(x)]\, dx$$

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, y_2(x)]\, dx$$

— — — — — — — — — — — —

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, y_{n-1}(x)]\, dx$$

Ces fonctions $y_n(x)$ sont bien définies et la connaissance de y_0 et de $f(x,y)$ suffit à les déterminer.

Supposons pour fixer les idées que:

$$0 < x - x_0 < a \quad \text{ou}$$

$$x_0 < x < a + x_0$$

C'est-à-dire que la différence $x - x_0$ ait deux bornes bien déterminées, 0 et a dans le cas actuel. Il résulte de ce fait que la fonction $f(x,y)$ aura une borne F telle que:

$$|f(x,y)| \leq F$$

dans tout l'intervalle $x_0 < x < a + x_0$ .. F est une constante

Montrons que la suite des fonctions $y_n(x)$ converge uniformément vers une limite bien déterminée.

Examinons la différence: $|y_1(x) - y_0|$:

$$|y_1(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^{x} |f(x, y_0)|\, dx$$

Or il est évident que:

$$\int_{x_0}^{x} |f(x, y_0)|\, dx \leq F(x - x_0) \leq F.a$$

car F est la valeur maximum de $f(x,y)$ dans l'intervalle $x_0 < x < a + x_0$ et $a > x - x_0$.

Continuons:

$$|y_2(x) - y_1(x)| = \int_{x_0}^{x} \left| f[x, y_1(x)] - f(x, y_0) \right| dx$$

Appliquons immédiatement la condition de Lipschitz

D'après cette condition:

$$|f(x, y_1(x)) - f(x, y_0)| \leq M|(y_1(x) - y_0)|$$

Cette inégalité subsiste si on prend les intégrales de x_0 à x des deux membres:

$$\int_{x_0}^{x} |f[x, y_1(x)] - f(x, y_0)|\, dx \leq M \int_{x_0}^{x} |y_1 - y_0|\, dx$$

Mais nous avons trouvé ci-dessus que:

$$|y_1(x) - y_0| \leq F(x - x_0)$$

Nous avons donc en réunissant les termes:

$$\left| y_2(x) - y_1(x) \right| = \int_{x_0}^{x} \left| f[x, y_1(x)] - f(x, y_0) \right| dx \leq M \int_{x_0}^{x} |y_1 - y_0| \, dx \leq MF \int_{x_0}^{x} (x - x_0) dx$$

Mais $\int_{x_0}^{x} (x - x_0)\, dx = \frac{(x - x_0)^2}{2}$

D'où :

$$\left| y_2(x) - y_1(x) \right| \leq M.F.\frac{(x - x_0)^2}{2} \qquad (M = K)$$

En faisant les mêmes opérations pour $y_3(x)$ nous avons immédiatement :

$$\left| y_3(x) - y_2(x) \right| \leq \int_{x_0}^{x} \left| f[x, y_2(x)] - f[x, y_1(x)] \right| dx \leq M \int_{x_0}^{x} |y_2 - y_1| \, dx$$

$$\leq M^2 . F \int_{x_0}^{x} \frac{(x - x_0)^2}{2} dx \leq K^2 . F \frac{(x - x_0)^3}{3!}$$

Ainsi nous avons la formule de récurrence

$$\left| y_n(x) - y_{n-1}(x) \right| \leq \frac{F.K^{n-1} (x - x_0)^n}{n!}$$

Montrons qu'elle est vraie pour $n+1$

Or:

$$\left| y_{n+1}(x) - y_n(x) \right| = \int_{x_0}^{x} \left| f[x, y_n(x)] - f[x, y_{n-1}(x)] \right| dx$$

$$\leq K \int_{0}^{x} \left| y_n - y_{n-1} \right| dx \leq \frac{FK^n}{n!} \int_{x_0}^{x} |(x - x_0)|^n dx$$

$$\leq \frac{FK^n (x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

c. q. f. d.

Nous avons bien donc:

$$\left| y_n(x) - y_{n-1}(x) \right| \leq \frac{F.K^{n-1} (x - x_0)^n}{n!} \leq \frac{FK^{n-1} a^n}{n!} = \frac{F}{K} \frac{(aK)^n}{n!}$$

En passant à la limite pour $n \to \infty$ on a :

$$\lim_{n \to \infty} \left| y_n(x) - y_{n-1}(x) \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{F}{K} \cdot \frac{(aK)^n}{n!} = 0$$

Nous voyons donc que pour n augmentant indéfiniment

la différence entre deux termes consécutifs tend vers vers 0
De plus comme le facteur

$\frac{F}{K} \frac{(aK)^n}{n!}$ ne dépend pas de x on peut

dire que la suite est une uniformément convergente dans l'intervalle $x_0 < x < a$ quelque soit la valeur de x.

Nous disons maintenant que la fonction $y(x)$ cherchée égale:

$$y(x) = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) \cdots +$$

En effet on a pour cette série:

$S_n = y_n(x)$ car tous les termes précédent se détruisent les uns les autres.

Or nous avons que:

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} (y_n - y_{n-1}) = 0$$

Ainsi $y(x)$ est une série uniformément convergente

De plus $y(x)$ est continue car y_n est continue

et par suite $y(x)$ qui est la somme infinie de fonctions continues est continue car la série est uniformément convergente.

Il est facile de voir que pour $x = x_0$ $y(x_0) = y_0$
En effet pour $x = x_0$ les différences $y_1 - y_0$, $y_2 - y_1$, ...

sont toutes nulles et on a bien: $y(x_0) = y_0$

Montrons aussi que $y(x)$ satisfait à l'équation différentielle. En effet il suffit de montrer que:

$$y_x(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)\, dx$$

En effet nous pourons écrire:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, y_{n-1}(x)]\, dx$$

Passons à la limite:

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f[x, y_{n-1}(x)]\, dx$$

Or $\lim_{n \to \infty} y_n(x) = y(x)$

et puisque la série $y(x)$ est uniformément convergente d'après un théorème bien connu de l'analyse puisque

$$f[x, y_{n-1}(x)] \to f[x, y(x)]$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} f[x, y_{n-1}(x)] = \int_{x_0}^{x} f[x, y(x)]\, dx$$

Nous voyons donc que $y(x)$ satisfait bien à l'équation

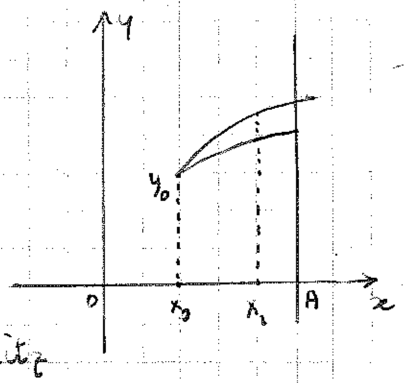
Montrons que $y(x)$ défini ci-dessus est la seule solution de l'équation pourvu que la condition de Lipschitz soit remplie.

Cette condition était la suivante:

$$|f(x, y) - f(x, y_1)| \leq M\, |y - y_1|$$

M était un nombre positif.

Afin de montrer que $y(x)$ est la seule solution montrons l'unicité de la solution dans un intervalle quelconque, choisi arbitrairement.



Pour notre démonstration choisissons cet intervalle de manière que:

$$0A = x_0 + \frac{1}{2M}$$

M est toujours la même quantité contenue dans la condition de Lipschitz

Supposons qu'il existe deux solutions passant par $x_0 y_0$ dans l'intervalle

$$x_0 < x < x_0 + \frac{1}{2M}$$

Soient $y(x)$ et $Y(x)$ ces deux solutions. Montrons que ce résultat conduit à une absurdité.

Puisque les deux courbes sont différentes la différence

$$|y(x) - Y(x)|$$ ne s'annule pas. Elle

passe par un maximum.

Soit x_1 la valeur de l'abscisse pour ce maximum

Soit R la valeur de ce maximum. On peut écrire:

$$\left| y(x) - Y(x) \right| \leq \overset{R}{M} = \left| y(x_1) - Y(x_1) \right|$$

$$x_0 < x_1 < x_0 + \frac{1}{2M}$$

Puisque $y(x)$ et $Y(x)$ sont des solutions on a:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)\, dx$$

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,Y)\, dx$$

$$\left| y(x) - Y(x) \right| = \int_{x_0}^{x} \left| f(x,y) - f(x,Y) \right| dx$$

Or d'après la condition de Lipschitz:

$$\left| y(x) - Y(x) \right| = \int_{x_0}^{x} \left| f(x,y) - f(x,Y) \right| dx \leq M \int_{x_0}^{x} \left| y(x) - Y(x) \right| dx$$

Ces relations sont vraies pour toutes les valeurs de x de l'intervalle:

$$x_0 < x < x_0 + \frac{1}{2M}$$

et en particulier pour $x = x_1$. Dans ce cas on a:

$$\left| y(x_1) - Y(x_1) \right| = \int_{x_0}^{x_1} \left| f(x,Y) - f(x,Y) \right| dx \leq M \int_{x_0}^{x_1} \left| y(x) - Y(x) \right| dx$$

Comme la différence $y(x) - Y(x)$ est prise en valeur absolue c'est-à-dire que son signe est constant on peut appliquer le théorème de la moyenne et:

$$M \int_{x_0}^{x_1} \left| y(x) - Y(x) \right| dx \leq MR \left| x_1 - x_0 \right|$$

$$\text{Or} \quad x_1 - x_0 \leq \frac{1}{2M} \quad \text{par hypothèse}$$

Donc:

$$\left| y(x_1) - Y(x_1) \right| = R \leq MR \left| x_1 - x_0 \right| \leq MR \cdot \frac{1}{2M} = \frac{R}{2}$$

Nous arrivons au résultat absurde

$$R \leq \frac{R}{2}$$

qui n'est vérifié que si $R = 0$ c'est-à-dire que la différence $\left| y(x) - Y(x) \right|$ est toujours nulle car son maximum est nul. Ce qui revient à dire

que $y(x)$ et $Y(x)$ sont confondus.

Exemple

$$y' = x^2 + y = f(x,y) \qquad x_0 = y_0 = 0$$

$$y_1 = 0 + \int_0^x (x^2 + y_0)\,dx = \int_0^x x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$$

$$y_2 = \int_0^x (x^2 + y_1)\,dx = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^3}{3}\right)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12}$$

$$y_3 = \int_0^x (x^2 + y_2)\,dx = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60}$$

$$y_4 = \int_0^x (x^2 + y_3)\,dx = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60}\right) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60} + \frac{x^6}{360}$$

. . . . . .

$$Y(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60} + \frac{x^6}{360} \cdots\cdots$$

La condition de Lipschitz est réalisée ici car :

$$|f(x,y) - f(x,y_1)| = |x^2 + y - x^2 - y_1| = |y - y_1|$$

On a évidemment

$$|y - y_1| \leq M|y - y_1|$$

pour tous les M positifs supérieurs à 1

Remarques

Les solutions des équations différentielles sont de deux sortes

1° Solution particulière qui en dehors de l'équation remplit une condition initiale donnée

2° Solution générale.

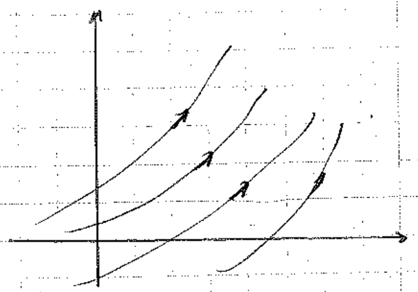
$$F(x, y) = C$$

où y est une fonction de x qui remplit l'équation donnée ~~demandée~~ et C une constante

La solution générale donne une famille de courbes et la connaissance de la solution générale permet de trouver la solution particulière

Enfin, résoudre une équation différentielle c'est l'intégrer ou en opérer la quadrature.

Ceci revient à dire, de trouver le mode de groupement des directions données par $y' = f(x,y)$



On connaît un exemple simple de ceci:

Certains instruments permettent de déterminer la direction de la vitesse d'un courant d'eau (la mer par exemple). On peut aussi avoir la profondeur. On a ainsi une série de directions et le problème consiste justement à trouver les courants qui admettent ces directions comme directions de la vitesse.

Equations différentielles de solution possible

a/ 1er cas soluble: cas des variables séparées.

On dit que les variables sont séparées si la fonction

$y' = f(x,y) = \varphi(x) . \psi(y)$ le produit de deux fonctions l'une de x et l'autre de y.

On peut écrire: $y' = \frac{dy}{dx} = \varphi(x) . \psi(y)$ ou

$$\frac{dy}{\psi(y)} = dx \; \varphi(x)$$ et

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x) \, dx + C$$

On a donc deux quadratures.

Montrons que ces 2 quadratures sont la solution.

On peut écrire l'égalité sous la forme:

$$\int^{y} \frac{dy}{\psi(y)} = \int^{x} \varphi(x) \, dx + C$$

En dérivant d'après la règle généralisée de Leibnizt car y est une fonction de x on a:

$$\frac{1}{\psi(y)} \, y' = \varphi(x) \quad ; \quad y' = \psi(y) \, \varphi(x)$$

qui n'est autre que l'équation donnée.
(on a pris la dérivée par rapport à x)

Ainsi la solution est bien donnée par les 2 quadratures indiquées ci-dessus.

Exemples

1/ $y' = \frac{\sin x}{y^2}$

$\frac{\sin dx}{y^2} = \sout{\sin x} \frac{dy}{dx}$

$y^2 dy = \sin x \, dx$

$\int y^2 dy = \int \sin x \, dx + C$

$\frac{1}{3} y^3 = - \cos x + C$

2/ $y' = x^2 \sqrt{y}$ – Solution passant par $x_0 = y_0 = 0$

on a immédiatement :

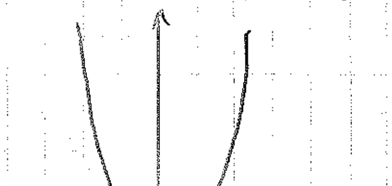
$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int x^2 dx + C$

$2\sqrt{y} = \frac{1}{3} x^3 + C$

Si on fait $x = y = 0$ on trouve $C = 0$. La solution est donc :

$2\sqrt{y} = \frac{1}{3} x^3$

$y = \frac{1}{36} x^6$



Seulement cette solution n'est pas la seule. En effet la solution $y = 0$ (l'axe ox) convient aussi. En effet si $y = 0$ $y' = 0$ et l'équation différentielle est remplie. De plus la droite $y = 0$ passe par $x_0 = y_0 = 0$

Aussi il n'y a pas une solution unique. C'est donc que la condition de Lipschitz n'est pas

remplie, au point donné. En effet nous devions avoir :

$$\frac{|f(x,y) - f(x,y_1)|}{|y-y_1|} \leq M$$

Or la limite de ce rapport donne $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Dans notre exemple :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Or au point $y_0 = 0$ et x été (en chaque point de Ox)

$\frac{\partial f}{\partial y}$ est infinie, et par suite la condition de Lipschitz n'est pas remplie et la solution n'est pas unique quoique la fonction soit continue.

2me Cas soluble : Équations homogènes

Une équation différentielle est dite homogène si x et y n'y entrent que par leur rapport.

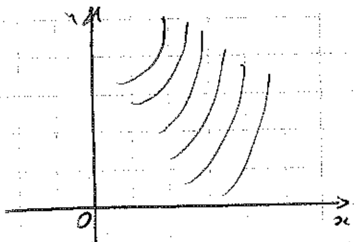
Ainsi : $y' = f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

Par exemple :

$$y' = f(x,y) = \frac{x^2 + ay^2 + bxy}{x^2 + \beta y^2 + \beta xy} = \frac{1 + a\left(\frac{y}{x}\right)^2 + b\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \beta\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \beta\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Ces équations sont dites homogènes parce que si l'on fait $x = \alpha x$, $y = \alpha y$ ces équations ne changent pas car

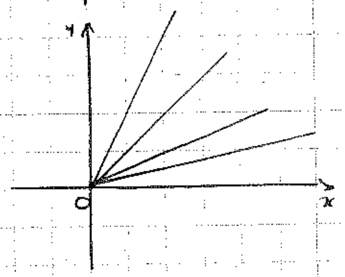
$$\frac{y}{x} = \frac{\alpha y}{\alpha x}$$



Remarque

Dans le cas général l'équation $y' = f(x,y)$ donnait une famille de courbes se déduisant l'une de l'autre par une constante et y' donnait la pente en chaque point. Ces courbes sont dites isoclines.

Dans le cas d'une équation homogène les isoclines sont des droites qui passent par l'origine : on a un faisceau de droite.



Il est facile de ramener l'intégration de l'équation homogène à celle de l'équation à variables séparées.

Posons: $\frac{y}{x} = u$ u est une fonction de x à déterminer

$y = ux$; $y' = \varphi(u)$

$y' = u'x + u = \varphi(u)$ (d'après l'équation)

Nous avons donc:

$$u' = \frac{\varphi(u) - u}{x}$$

Nous avons une équation à variables séparées

$$\frac{du}{dx} = \frac{\varphi(u) - u}{x}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\varphi(u) - u}$$

En intégrant on a:

$$\ln|x| = \int_a^{\frac{y}{x}} \frac{du}{\varphi(u) - u} + cte$$

Si l'on pose: $\int^{\frac{y}{x}} \frac{du}{\varphi(u) - u} = G\left(\frac{y}{x}\right)$ on a:

$$x = C e^{G\left(\frac{y}{x}\right)}$$

<u>Exemples</u>

I $y' = \frac{2xy + y^2}{x^2} = 2\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2u + u^2 = \varphi(u)$

$$\ln|x| = \int^{\frac{y}{x}} \frac{du}{2u + u^2 - u} = \int^{\frac{y}{x}} \frac{du}{u(u+1)} = \int^{\frac{y}{x}} \frac{du}{u} - \int^{\frac{y}{x}} \frac{du}{u+1}$$

$$\ln|x| = \ln \frac{u}{u+1} \Big|^{\frac{y}{x}} + \text{Const} \quad \text{ou}$$

$$x = C \frac{u}{u+1} = \frac{C \frac{y}{x}}{\frac{y}{x} + 1} = \frac{Cy}{x+y}$$

$$y = \frac{x^2}{C - x}$$

Remarquons que cette solution n'est pas la solution unique car si l'on suppose $y = 0$ l'équation différentielle est vérifiée.

$y=0$ est un cas spécial que nous traiterons plus bas.

II $y' = f(x,y) = \varphi\left(\dfrac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$

Cette équation n'est pas homogène. Mais il est facile de la rendre homogène par certaines transformations. Posons :

$$\left.\begin{aligned}\eta &= ax+by+c\\ \xi &= a'x+b'y+c'\end{aligned}\right\} \quad \varphi\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right) = \varphi\left(\frac{\eta}{\xi}\right) = y'$$

$$d\eta = a\,dx + b\,dy$$

$$d\xi = a'dx + b'dy$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a\,dx + b\,dy}{a'dx+b'dy} = \frac{a + b\frac{dy}{dx}}{a'+b'\frac{dy}{dx}} = \frac{a+by'}{a'+b'y'} = \frac{a+b\varphi\left(\frac{\eta}{\xi}\right)}{a'+b'\varphi\left(\frac{\eta}{\xi}\right)}$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a+b\varphi\left(\frac{\eta}{\xi}\right)}{a'+b'\varphi\left(\frac{\eta}{\xi}\right)}$$

Nous avons ainsi une équation homogène en η et ξ. On peut résoudre cette équation excepté dans le cas :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$$

car alors : $\quad \dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \alpha \quad ; \quad a' = a\alpha \quad ; \; b' = b\alpha$

et $\quad \dfrac{d\eta}{d\xi} = \dfrac{1}{\alpha} \quad$ résultat qui ne donne qu'une identité.

On résout alors le problème de cette manière

$$y' = \varphi\left(\frac{ax+by+c}{\alpha ax + \alpha by + c'}\right) = \varphi\left(\frac{x+\frac{b}{a}y+\frac{c}{a}}{\alpha x + \alpha\frac{b}{a}y + \frac{c'}{a}}\right)$$

Si l'on pose $\quad \dfrac{b}{a} = b_1 \quad ; \quad \dfrac{c}{a} = c_1 \quad ; \quad \dfrac{c'}{a} = c'_1$

on a :

$$y' = \varphi\left(\frac{x+b_1y+c_1}{\alpha(x+b_1y)+c'_1}\right)$$

Posons : $\quad x + b_1 y = \eta \quad$; dérivons par rapport à x :

$$1 + b_1 y' = \eta' = \frac{d\eta}{dx} = 1 + b_1\varphi\left(\frac{\eta+c_1}{\alpha\eta+c'_1}\right)$$

qui est une équation très simple car on peut avoir immédiatement x en fonction de η par intégration

c/ 3^{me} Cas soluble : Équations linéaires

On appelle équation linéaire de 1er ordre toute équation linéaire en y' et y.

Cette équation se présente sous la forme:

$$y' + A(x)\, y = B(x)$$

A et B sont des fonctions de x

$B(x)$ est dit second membre de l'équation.
Si $B(x)=0$ l'équation est dite sans second membre ou homogène par rapport à y car si l'on fait $y=\alpha y$ l'équation ne change pas.

1°/ Résolution de l'équation sans second membre

$$y' + A(x)\, y = 0$$

$$y' = -A(x)\, y$$

$$\frac{dy}{y} = -A(x)\, dx$$

$$\text{Ln}\, y = -\int A(x)\, dx + \text{Cons.}$$

$$y = e^{-\int A(x)\, dx + \text{const.}} = C e^{-\int A(x)\, dx}$$

On voit ici l'homogénéité des fonctions y car elles sont égales à une constante près.

2°/ Résolution de l'équation générale

Posons: $u(x) = e^{-\int A\, dx}$

Soit $y = u \cdot z$ z est une fonction inconnue.

Dérivons:

$$y' = u'z + uz'$$

Or: $y' + A(x)\, y = B(x) = y' + A(x)\, u \cdot z = B(x)$

ou $u'z + z'u + A u z = B$

$$z(u' + Au) + z'u = B$$

Or comme u est la solution de l'équation sans second

membre

$$u' + A u = 0$$

Il reste : $u z' = B$

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{B}{u} = B u^{-1} = B e^{+\int A\, dx}$$

$$z = \int B(x)\, e^{\int^x A(x)\,dx}\, dx$$

$$y(x) = e^{-\int^x A(x)\,dx} \left[\int B(x)\, e^{\int^x A(x)\,dx}\, dx + C \right]$$

(Une constante arbitraire ajoutée à $\int e^{-\int^x A(x)\,dx}$ ne change en rien à la solution)

Si l'on peut $e^{-\int A(x)\,dx} \int B(x)\, e^{\int^x A(x)\,dx}\, dx = y_1(x)$

on a :

$$y(x) = y_1(x) + C u$$

ainsi si l'on connaît Cu (solution de l'équation sans second membre) et une intégrale particulière de $y(x)$ on a immédiatement $y(x)$. Ceci peut s'énoncer d'une autre manière :

<u>Théorème</u> : Si l'on connaît une intégrale particulière de l'équation linéaire, on peut immédiatement ramener son intégration à celle de l'équation sans second membre

<u>Exemple</u>

$$y' + \frac{1}{x} y = e^{\alpha x}$$

$$u(x) = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$y(x) = \frac{1}{x} \left[\int e^{\alpha x} . e^{\ln x} dx + c \right]$$

$$= \frac{1}{x} \left[\int e^{\alpha x} x\, dx + c \right]$$

$$= \frac{1}{x} \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} x - \frac{1}{\alpha} \int e^{\alpha x} dx + c \right]$$

$$= \frac{1}{x} \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} x - \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha x} + c \right]$$

$$y(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha x}\left[1 - \frac{1}{\alpha x}\right] + \frac{C}{x}$$

Résultat qui était à prévoir car $\frac{C}{x} = C.\frac{1}{x} = Cu$

Nous verrons plus tard avec les équations d'ordre supérieur les équations linéaires avec leur théorie générale

Cas ~~résou~~ réduisibles aux équations linéaires

Equation de Bernoulli

$$y' + A(x)\, y = B(x)\, y^n \qquad (1)$$

Cette équation est dite équation de Bernoulli. Le cas $n = 0$ donne l'équation linéaire : $y' + A(x)y = B(x)$ et le cas $n = 1$ donne l'équation linéaire sans second membre

$$y' + [A(x) - B(x)]\, y = 0$$

Divisons l'équation (1) par y^n. On a :

$$\frac{y'}{y_n} + \frac{Ax}{y^{n-1}} = B(x) \qquad (2)$$

Posons : $\frac{1}{y^{n-1}} = z$

$$z' = -(n-1)\frac{y'}{y^n} \quad ; \quad \frac{y'}{y^n} = -\frac{z'}{n-1}$$

En portant cette valeur dans 2 on a :

$$-(n-1)^{-1} z' + A(x) z = B(x)$$

qui est équation linéaire qu'on sait résoudre

d) Equations immédiatement solubles ou recherche d'un facteur intégrant

Nous savons que la solution générale d'une équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$F(x, y) = C$$

En prenant la différentielle totale de cette fonction nous avons:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \qquad (1)$$

ou en divisant par dx:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Soit:

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Considérons une équation différentielle de la forme:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \qquad (2)$$

Cette équation n'est pas généralement soluble car elle n'est pas une différentielle totale exacte.
Supposons qu'elle le soit. En identifiant (1) et (2) nous avons:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$$

Différentions $\frac{\partial F}{\partial x}$ par rapport à y et $\frac{\partial F}{\partial y}$ par rapport à x, nous avons:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

en remarquant que: $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ nous avons:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

C'est la condition nécessaire et suffisante pour que

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

soit une différentielle totale exacte. Nous avons alors:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = dF = 0$$

$$F(x,y) = C$$

qui est justement la solution de l'équation.

<u>Exemple</u>

$$(3x^2+y)\,dx + x\,dy = 0$$

Ici : $P(x,y) = 3x^2+y$

$Q(x,y) = x$

On a bien :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

L'expression est une différentielle totale exacte. C'est :

$dF = d(x^3 + xy)$

Donc : $F(x,y) \equiv x^3+xy = C$

C'est la solution

Prenons le cas où $P\,dx + Q\,dy = 0$ n'est pas une différentielle totale exacte.

Cherchons s'il n'existe pas un facteur p tel que :

$$p\left[P dx + Q dy\right] = 0$$

donne une différentielle totale exacte.

Un tel facteur existe toujours. En effet

$$\frac{\partial}{\partial y}(pP) = \frac{\partial}{\partial x}(pQ)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}P + \frac{\partial P}{\partial y}p = \frac{\partial p}{\partial x}Q + \frac{\partial Q}{\partial x}p$$

$$p\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right] + P\frac{\partial p}{\partial y} - Q\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Nous voyons que nous avons pour p là une équation différentielle d'un ordre plus élevé car c'est une équation aux dérivées partielles. Aussi en général la recherche du facteur intégrant est un problème plus difficile à résoudre que l'équation

Cas particuliers

1/ Supposons que p soit constant

Dans ce cas : $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

ce qui revient à dire que c'est une équation dont l'expression

est une différentielle totale exacte. Dans ce cas la recherche de p est inutile.

1°/ Supposons que p soit fonction seulement de x ou de y

Par exemple supposons: $p = p(x)$

Alors:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

et la relation: $$\frac{\partial}{\partial y}(pP) = \frac{\partial}{\partial x}(pQ)$$

devient:

$$p\,\frac{\partial P}{\partial y} = p\,\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{dp}{dx}\,Q \qquad (1)$$

[on peut employer la notation $\frac{dp}{dx}$ car p n'est fonction que de x]

Or rappelons nous qu'une équation linéaire s'écrivant

$$y' + Ay = B \qquad (2)$$

Si on remplace y' par $\frac{dy}{dx}$ on a:

$$[Ay - B]\,dx + dy = 0 \qquad (3)$$

on peut voir que (1) est une équation linéaire en p. Or dans l'équation linéaire (2) on voit que le coefficient de y' est 1 [c'est la même chose pour le coefficient de dy dans (3)]

Faisons donc $Q = 1$ dans l'équation (1). On a alors que: $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ et il reste:

$$p\,\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{dp}{dx}$$

Or p est une fonction de x seule, $\frac{dp}{dx}$ est une fonction de x seule, il s'ensuit que $\frac{\partial P}{\partial y}$ doit être aussi une fonction de x seule et on a:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \varphi(x)$$

qui donne immédiatement ~~une~~ en intégrant une fonction linéaire en y.

Nous constatons donc que les cas particuliers conduisent à des cas déjà traités.
En général la recherche d'un facteur intégrant n'est pas pratique

Equation implicite en y' - Equation de Clairaut

Il y a des cas où l'équation différentielle est donnée sous forme implicite et il est plus facile de résoudre l'équation telle qu'elle est donnée sans la mettre sous forme explicite (ce qui parfois est assez difficile)

Equation de Clairaut

On appelle équation de Clairaut l'équation différentielle de la forme:

$$y = xy' + \varphi(y') \qquad (1)$$

Différentions cette équation par rapport à x

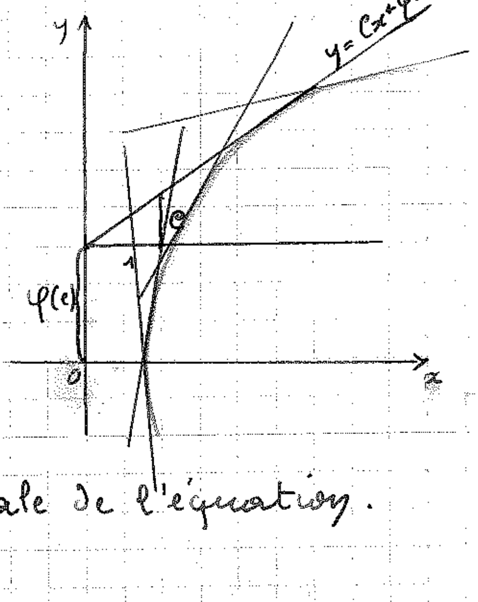
$$y' = y' + x\frac{dy'}{dx} + \varphi'_{y'}\frac{dy'}{dx}$$

Il reste:

$$\frac{dy'}{dx}\left[x + \varphi'_{y'}(y')\right] = 0 \qquad (2)$$

Remarque

La condition exprimée par la relation (2) est nécessaire mais pas suffisante pour la solution de l'équation car toute solution de (1) remplit la condition (2) mais toute fonction qui remplit (2) ne remplit pas nécessairement (1) car il y a des constantes.



L'équation (2) nous donne:

1) $\frac{dy'}{dx} = 0$, $y' = C$

et l'équation (1) devient:

$$y = Cx + \varphi(C) \qquad (4)$$

qui donne une famille de droites

C'est ~~l'équa~~ la solution générale de l'équation.

2/ $x + \varphi'_{y'}(y') = 0$ (3)

D'autre part nous avons : $y = xy' + \varphi_{y'}(y') = 0$ (1)

En éliminant y' entre ces deux équations on obtient une certaine équation :

$$F(x,y) = 0$$

On dit que cette équation est l'intégrale singulière de l'équation. Elle n'est pas comprise dans l'intégrale générale

Voyons ce que représente cette fonction $F(x,y) = 0$

Faisons $y' = c$ dans (1) et (3). On a :

$$y = Cx + \varphi(C) \quad (1)'$$

$$0 = x + \varphi'_c(C) \quad (3)'$$

Nous voyons que l'élimination de c entre (1) et (3) donne l'enveloppe des droites représentées par l'équation (1) car on élimine le paramètre c entre l'équation des droites et la dérivée de cette équation par rapport au paramètre c.

Ainsi : $F(x,y) = 0$ est l'équation de l'enveloppe des droites $y = Cx + \varphi(c)$

important En résumé : l'équation de Clairaut donne une famille de droites comme solution générale et une courbe enveloppe de ces droites comme solution singulière.

<u>Exemple</u> :

$$y = xy' + y' - y'^2$$

Ici $\varphi(y') = y' - y'^2$

1/ La solution générale est :

$$y = Cx + C(1-C)$$

Cherchons la solution singulière.

1/ $\left.\begin{aligned} x + \varphi'_{y'}(y') &= x + 1 - 2y' = 0 \\ y = xy' + y' - y'^2 &= 0 \end{aligned}\right\}$ (I)

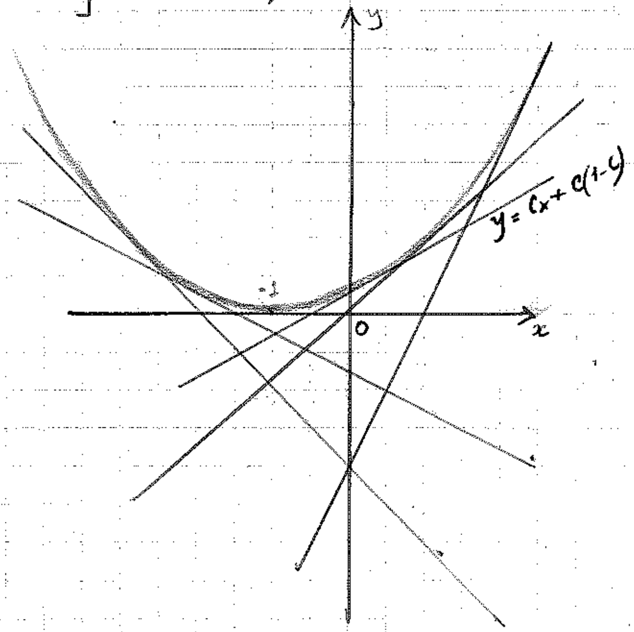
Éliminons y' entre les équations (I)

La première équation donne :

$$y' = \frac{x+1}{2}$$

En portant cette valeur dans la seconde équation on a :

$$y = \frac{x+1}{2}\left[x+1 - \frac{x+1}{2}\right] = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$$



C'est l'équation d'une parabole qui a son sommet sur Ox au point $x=-1$ et dont la concavité est tournée vers le haut.

Cette parabole est l'enveloppe des droites

$$y = Cx + C(1-C)$$

Remarque :

Traitons le problème directement.

Nous avons l'équation du second degré en y' :

$$y'^2 - (x+1)\,y' + y = 0$$

y' n'est défini que si :

$$y' = \frac{x+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - y}$$

où $\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - y}$ est ~~c'est~~ possible

c'est-à-dire si

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - y > 0$$

ou $$y < \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$$

Nous voyons donc que y' n'est défini que pour les points extérieurs à la parabole $y = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$ que nous avons construite ci-dessus. Cela explique pourquoi il y a aucune isocline [c'est-à-dire des droites $y = Cx + C(1-C)$] qui passe par un point à l'intérieur de la parabole.

10/12/1934

Nous savons que la solution générale d'une équation différentielle de 1er ordre s'écrit sous la forme:

$$\phi(x, y, C) = 0 \qquad (1)$$

Il est facile d'avoir l'équation différentielle relative à cette équation. Différentions totalement (1) par rapport à x. On a:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} y' = 0 \qquad (2)$$

On obtient une équation en y' qui contient C. Il suffit d'éliminer C entre (2) et (1) et on a alors une équation:

$$\mathcal{F}(x, y, y') = 0 \qquad (3)$$

qui est l'équation différentielle cherchée car x et y vérifient et (1) et (2)

D'autre part nous avons montré que l'équation

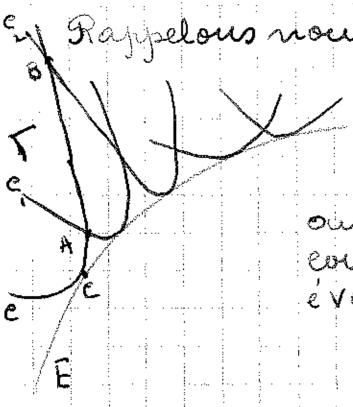
$$\Phi(x, y, C) = 0$$

donne une famille de courbes. C'est l'intégrale générale de l'équation différentielle (3)

Montrons que:

Si les courbes representées par l'équation $\phi(x, y, C) = 0$ ont une enveloppe, cette enveloppe est une intégrale singulière de l'équation différentielle.

Rappelons nous la définition de l'enveloppe



Soit une des courbes ci-dessus.

$\Phi(x, y, C) = 0$ Considérons une autre courbe $\Phi(x, y, C_1) = 0$ Les deux courbes se coupent en A. On a évidemment en ce point:

$$\frac{\Phi(x, y, C_1) - \phi(x, y, C)}{} = 0$$

Si l'on fait tendre C vers C_1 de manière que les courbes se confondent A tend vers une limite C pour laquelle on aura

$$\frac{\partial \phi}{\partial C} = 0$$

Le lieu géométrique du point C définit la courbe enveloppe aux courbes Γ. Cette courbe a pour équation paramétrique:

$$\phi(x, y, C) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial c} = 0$$

En éliminant C entre ~~ceux~~ ces deux équations on obtient

$$\varphi(x, y) = 0$$

qui est l'équation de l'enveloppe.

Démontrons maintenant le théorème.

En chaque point de l'enveloppe E, il passe une courbe Γ tangente à E; par suite en chaque point de l'enveloppe x, y, y' sont les mêmes que pour la courbe intégrale correspondante. Ainsi les éléments de contact de la courbe E appartiennent à l'ensemble des éléments de contact de la famille des courbes Γ; la courbe E satisfait donc à l'équation différentielle sans appartenir à l'intégrale générale. C'est donc une intégrale singulière de l'équation.

Remarque

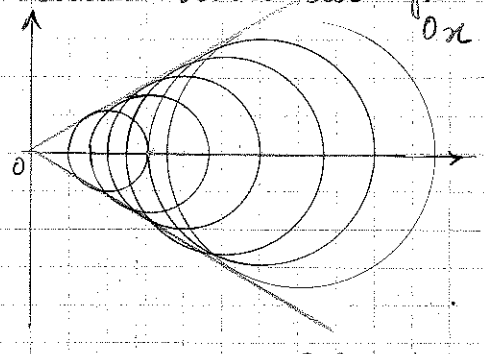
Il est évident que si l'enveloppe n'existe pas c'est-à-dire si l'élimination de C entre la fonction $\phi(x, y, C)$ et sa dérivée par rapport à C n'est pas possible, le théorème n'a plus sa raison d'être.

Exemple

Soit:

$$\phi(x, y, C) = (X - C)^2 + y^2 = \alpha^2 C^2 \qquad (1)$$

l'équation des courbes Γ. Ces courbes sont dans notre cas particulier des cercles centrés sur Ox et de rayon variable égal à αC. Nous supposerons $\alpha \leq 1$



Cherchons l'équation différentielle de ces cercles.

Différentions totalement par rapport à x. On a:

$$+ 2(X - C) + 2yy' = 0$$

$$x-c+yy'=0 \qquad (2)$$

Eliminons c entre (1) et (2). De (2) on a:

$$c = x+yy'$$

En portant cette valeur dans (1) on a:

$$y^2y'^2+y^2=\alpha^2(x+yy')^2 \qquad (3) \quad \text{Eq. dif. des cercles}$$

Cherchons d'autre part l'enveloppe des cercles Γ.

Differentions (1) par rapport à c.

$$-2(x-c) = 2\alpha^2 c$$

$$c = \frac{x}{1-\alpha^2}$$

En portant cette valeur dans (1) on a

$$\left(x-\frac{x}{1-\alpha^2}\right)^2+y^2 = \frac{\alpha^2x^2}{(1-\alpha^2)^2}$$

$$\frac{\alpha^4x^2}{(1-\alpha^2)^2}+y^2=\frac{\alpha^2x^2}{(1-\alpha^2)^2}$$

$$y^2=\frac{\alpha^2x^2}{(1-\alpha^2)^2}-\frac{\alpha^4x^2}{(1-\alpha^2)^2}=\frac{\alpha^2x^2(1-\alpha^2)}{(1-\alpha)^2}$$

$$y^2=\frac{\alpha^2x^2}{1-\alpha^2}$$

$$y = \pm\frac{\alpha x}{\sqrt{1-\alpha^2}} \qquad (4)$$

On a la condition nécessaire $\alpha \leq 1$

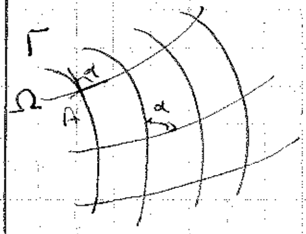
L'équation (4) donne deux droites passant par 0 symétrique par rapport à Ox.

Il est facile de voir que y (4) remplit l'équation différentielle (3).

Ainsi les deux droites $y = \pm\frac{\alpha x}{\sqrt{1-\alpha^2}}$ sont donc deux intégrales singulières de l'équation (3).

Trajectoires dans le plan

Considérons le faisceau des courbes Γ représentées par par l'intégrale générale



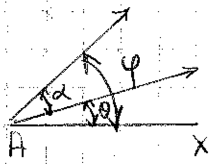
$$\Phi(x, y, C) = 0 \qquad (1)$$

dont l'équation différentielle est

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (2)$$

Considérons une courbe Ω qui coupe toutes les courbes Γ suivant le même angle α.

Soit $\eta = \eta(x)$ l'équation de Ω. Au point A considérons la tangente à Γ et la tangente à Ω. Elles font entre elles un angle constant α.



Soient φ et θ les angles que font les tangentes en A à Γ et Ω avec l'axe des abscisses. On a d'après la propriété de la dérivée à une courbe :

$$\operatorname{tg}\varphi = y' \qquad \operatorname{tg}\theta = \eta'$$

D'autre part $\alpha = \varphi - \theta$; $\varphi = \alpha + \theta$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta}$$

$$y' = \frac{\eta' + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \eta'\operatorname{tg}\alpha}$$

En remplaçant dans (2) y et y' par η et $\dfrac{\eta' + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \eta'\operatorname{tg}\alpha}$

nous avons l'équation différentielle des courbes Ω.

$$F\left(x, \eta, \frac{\eta' + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \eta'\operatorname{tg}\alpha}\right) = 0$$

Les courbes Ω sont dites trajectoires d'angle α des courbes Γ définies par $\Phi(x, y, C) = 0$

Cas particulier : Trajectoires orthogonales

Quand $\alpha = \frac{\pi}{2}$ les trajectoires sont dites orthogonales.

Dans ce cas : $\operatorname{tg}\alpha$ est infinie et :

$$y' = -\frac{1}{\eta'}$$

[résultat qui était à prévoir]

<u>Exemple</u>

Trajectoires orthogonales aux hyperboles $xy = C$

Leur équation différentielle est :

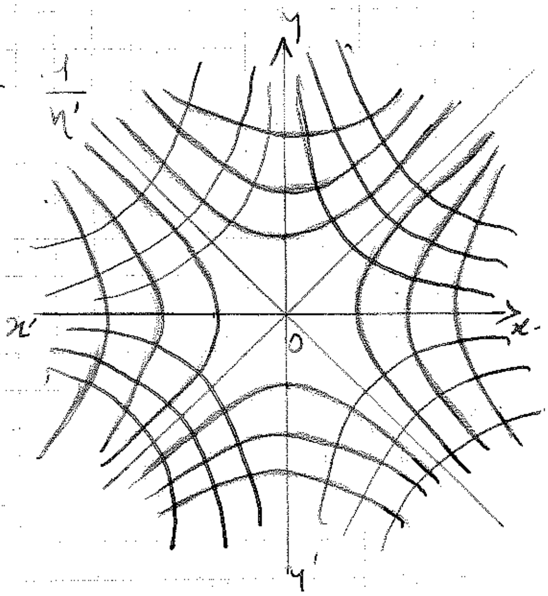
$$y + xy' = 0$$

Faisons $\quad y = \eta \qquad y' = -\frac{1}{\eta'}$

D'où : $\quad \eta - \frac{x}{\eta'} = 0$

$$\eta\eta' = x$$

$$\eta^2 = x^2 + C$$



Ce sont des hyperboles équilatères.

L'ensemble des courbes et des trajectoires est indiqué sur la figure.

Les trajectoires orthogonales ont de l'importance en physique, dans les champs de direction etc

---

Système d'équations différentielles. - Equations d'ordre supérieur au premier

Nous avons vu qu'une équation différentielle de 1er ordre s'écrivait sous les formes:

$$F(x, y, y') = 0 \qquad \text{forme implicite}$$

$$y' = f(x, y) = \qquad \text{forme explicite}$$

Une équation différentielle de second ordre s'écrira alors:

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

ou $\quad y'' = f(x, y, y')$

En général une équation d'ordre n s'écrit:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^n) = 0$$

ou $\quad y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n} = f[x, y, y', y'' \ldots y^{(n-1)}]$

La 2e forme est la forme explicite; c'est-à-dire que l'équation est résolue par rapport à ~~la plus haute puissance de y~~ (soit à la dérivée d'ordre le plus grand).

Soient:

$$y' = f(x, y, z) \qquad y = y(x) \qquad z = z(x)$$

$$z' = g(x, y, z)$$

Deux équations différentielles de premier ordre.

Le système de ces deux équations est dit:

Système d'équations différentielles simultanées de 1er ordre à deux variables y et z.

Naturellement on peut avoir un nombre quelconque de variables. On a alors un nombre égal d'équations différentielles.

Soient $y_1(x)$, $y_2(x)$; $y_3(x)$ ... $y_n(x)$ nos fonctions de x.

On a:

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1' = f_1(x, y_1, y_2 \cdots y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = y_2' = f_2(x, y_1, y_2 \cdots y_n)$$

$$\frac{dy_3}{dx} = y_3' = f_3(x, y_1, y_2, y_3 \cdots y_n)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = y_n' = f_n(x, y_1, y_2 \cdots y_n)$$

On a un système d'équations simultanées de 1er ordre de n variables.

Théorème

Une équation différentielle de n° ordre pour une seule variable y est équivalente à un système de n équations simultanées de 1er ordre à n variables.

I/ Cas d'une équation du second ordre

Soit donné:

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (1)$$

Posons:

$$z = y' \qquad (2)$$

On a:

$$\frac{dz}{dx} = y'' = f(x, y, y') \qquad (3)$$

Les équations (2) et (3):

$$\frac{dy}{dx} = z$$

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y, z)$$

forment un système de 2 équations simultanées.

Nous voyons donc que l'équation (1) a été remplacée par deux équations simultanées de 1er ordre à deux variables.

II Cas général

Soit $y^{(n)} = f[x, y, y' \ldots y^{(n-1)}]$

l'équation différentielle donnée.

Posons:

$$y = y_1(x)$$
$$y' = y_2(x) = \frac{dy_1}{dx}$$
$$y'' = y_3(x) = \frac{dy_2}{dx}$$
$$\ldots \quad \ldots \ldots \quad \ldots \ldots$$
$$y^{(n-1)} = y_n = \frac{dy_{n-1}}{dx}$$
$$y^{(n)} = y_{n+1} = \frac{dy_n}{dx} =$$
$$y^{(n)} = \frac{dy_{n+1}}{dx} = y^{(n)} = f[x, y, y', y'' \ldots y^{(n-1)}] = f[x, y_1, y_2, y_3 \ldots y_n]$$

On a ainsi n équations du 1er ordre qui sont équivalentes à $y^{(n)}$ c.q.f.d.

Ainsi chaque équation d'ordre quelconque n peut être considérée comme équivalente à un système d'équations du 1er ordre à n variables.

Soit donné le système de n équations:

$$y_1' = y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), y_2 \ldots \ldots y_n)$$
$$y_2' = y_2'(x) = f_2(x, y_1, y_2 \ldots \ldots y_n)$$
$$y_3' = y_3'(x) = f_3(x, y_1, y_2 \ldots \ldots y_n)$$
$$\ldots \ldots$$
$$y_n^{(n)} = y_n^{(n)} = f_n(x, y_1, y_2 \ldots \ldots y_n)$$

Supposons les fonctions $f_1, f_2 \ldots f_n$ sont continues et que chaque fonction f_ν satisfasse à la condition de Lipschitz exprimée par:

$$\left| f_\nu(x, y_1, y_2 \ldots \ldots) - f_\nu(x, Y_1, Y_2 \ldots Y_n) \right| \leq K\left(|y_1 - Y_1| + |y_2 - Y_2| \ldots + |y_n - Y_n| \right)$$

$$\nu = 1, 2, 3, 4 \ldots n$$

où $Y_1, Y_2 \dots Y_n$ sont des valeurs voisines de $y_1, y_2 \dots$

Supposons qu'en un point donné x_0, y_0 on connaisse :

$$y_1(x_0) = y_1^0$$
$$y_2(x_0) = y_2^0$$
$$y_3(x_0) = y_3^0$$
$$\dots\dots$$
$$y_n(x_0) = y_n^0$$

Si toutes les conditions ci-dessus sont réalisées,

Il existe toujours une équa solution et une seule de l'équation du système qui remplit les conditions initiales posées.

Démonstration

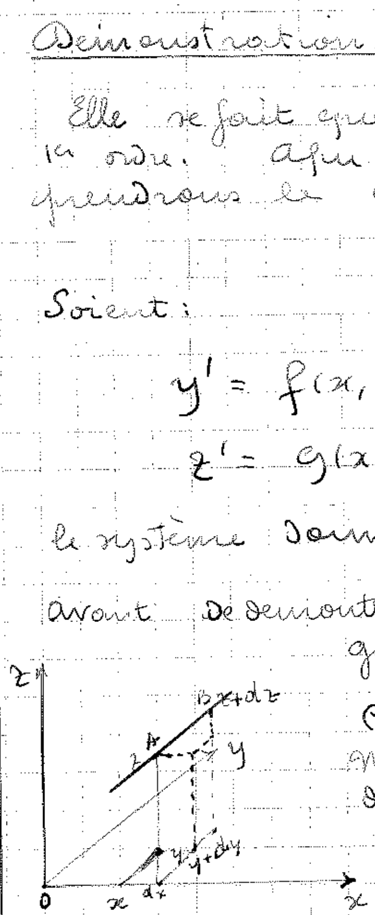
Elle se fait que pour le cas d'une équation de 1er ordre. Afin d'éviter des longs calculs nous prendrons le cas d'un système de 2 équations.

Soient :

$$y' = f(x, y, z)$$
$$z' = g(x, y, z)$$

le système donné

avant de démontrer ce théorème voyons la signification géométrique de ces deux équations.



Considérons un point x, y, z de l'espace. Nous avons pour ce point les valeurs de z' et y' car nous connaissons f et g.
Si on donne un petit accroissement à x, y et z prendrons des accroissements dy et dz et le point viendra en z+dz

On voit donc que la droite AB a une direction bien déterminée car on connait y' et z'.
On peut donc dire que les 2 équations ci-dessus

définissent un champ de directions dans l'espace. Ces directions sont dites éléments de ligne. Le problème consiste à les grouper.

Revenons à notre démonstration.

Soit x_0, y_0, z_0 un point donné

Soient

M_1 et M_2 les maximums des fonctions $f(x,y,z)$ et $g(x,y,z)$ dans un intervalle déterminé comprenant le point x_0, y_0, z_0. On a évidemment:

$$f(x,y,z) \leq M_1$$

$$g(x,y,z) \leq M_2$$

La condition de Lipschitz nous donne:

$$\left| f(x,y,z) - f(x,y_1,z_1) \right| \leq K_1 \left[|y-y_1| + |z-z_1| \right]$$

$$\left| g(x,y,z) - g(x,y_1,z_1) \right| \leq K_2 \left[|y-y_1| + |z-z_1| \right]$$

Soit la suite des fonctions:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_0,z_0)\,dx \quad ; \quad z_1 = g_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_0,z_0)\,dx$$

....

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_n,z_n)\,dx \quad ; \quad z_n = z_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_n,z_n)\,dx$$

Nous pourons écrire

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(x,y_0,z_0)\,dx \right| \leq M_1(x-x_0)$$ d'après le théorème de la moyenne

$$|z_1 - z_0| = \left| \int_{x_0}^{x} g(x,y_0,z_0)\,dx \right| \leq M_2(x-x_0)$$

Soit $u_n = \left| y_n - y_{n-1} \right| + \left| z_n - z_{n-1} \right|$

D'après les égalités ci-dessus nous pourons écrire:

$$u_n \leq M(x-x_0) \qquad M = M_1 + M_2$$

Ecrivons:

$$y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n, z_n)\, dx$$

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}, z_{n-1})\, dx$$

$$|y_{n+1} - y_n| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(x, y_n, z_n) - f(x, y_{n-1}, z_{n-1})] dx \right|$$

En appliquant la condition de Lipschitz nous aurons immédiatement:

$$|y_{n+1} - y_n| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(x, y_n, z_n) - f(x, y_{n-1}, z_{n-1})] dx \right| \leq K_1 \int_{x_0}^{x} \left[|y_n - y_{n-1}| + |z_n - z_{n-1}| \right] dx$$

$$|y_{n+1} - y_n| \leq K_1 \int_{x_0}^{x} u_n\, dx$$

De même on aura:

$$|z_{n+1} - z_n| \leq K_2 \int_{x_0}^{x} u_n\, dx$$

En additionnant:

$$|y_{n+1} - y_n| + |z_{n+1} - z_n| = u_{n+1} \leq K \int_{x_0}^{x} u_n\, dx$$

$K = K_1 + K_2$

D'autre part:

$$u_2 \leq K \int_{x_0}^{x} u_1\, dx \leq KM \int_{x_0}^{x} (x - x_0)\, dx = \frac{KM}{2} (x - x_0)^2$$

à fortiori car nous avons trouvé:

$$u_n \leq M(x - x_0)$$

De même:

$$u_3 \leq K \int_{x_0}^{x} u_2\, dx \leq \frac{MK}{2} \int_{x_0} (x - x_0)^2 = M. \frac{K^2 (x - x_0)^3}{1.2.3}$$

D'une manière générale nous aurons:

$$u_n \leq M \frac{K^{n-1} (x - x_0)^n}{n!}$$

Mais il est évident que: $|y_n - y_{n-1}| \leq u_n$

et $|z_n - z_{n-1}| \leq u_n$.

Dans ce cas on aura à fortiori

$$|y_n - y_{n-1}| \leq \frac{MK^{n-1}(x-x_0)^n}{n!} = \frac{M}{K}\frac{\{K(x-x_0)\}^n}{n!}$$

$$|z_n - z_{n-1}| \leq \frac{MK^{n-1}(x-x_0)^n}{n!} = \frac{M}{K}\frac{\{K(x-x_0)\}^n}{n!}$$

Considérons les séries de termes générals

$(y_n - y_{n-1})$ et $(z_n - z_{n-1})$

$$y(x) = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots (y_n - y_{n-1}) + \cdots$$

$$z(x) = z_0 + (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \cdots (z_n - z_{n-1}) + \cdots$$

Ces séries sont uniformément convergentes car le terme général est inférieur à la série exponentielle

$$\frac{M}{K}\frac{\{K(x-x_0)\}^n}{n!}$$

qui est uniformément convergente pour toutes les valeurs de x.

La somme partielle de la série $y(x)$ est :

$$y_n$$

On peut donc écrire :

$$y(x) = \lim_{n \to \infty} y_n$$

La fonction $y(x)$ est continue car c'est la somme d'une série de fonctions continues uniformément convergente.

Montrons que les séries $y(x)$ et $z(x)$ sont les solutions cherchées, c'est-à-dire que :

1/ $y(x)$ et $z(x)$ satisfont à l'équation différentielle

2/ qu'elles passent par le point x_0, y_0, z_0

3) que c'est la seule solution.

En effet :

1er) Nous pouvons écrire :

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}, z_{n-1})\, dx$$

Si nous faisons tendre n vers l'infini, le premier membre tend vers $y(x)$.

D'autre part d'après un théorème de l'analyse puisque on a toujours

$$f(x, y_{n-1}, z_{n-1}) < f(x, y, z)$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}, z_{n-1})\, dx = \int_{x_0}^{x} f(x, y, z)\, dx$$

et on aura:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y, z)\, dx$$

De même en opérant avec les z nous aurons:

$$z(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} g(x, y, z)\, dx$$

Nous voyons que pour $x = x_0$ $y = y_0$ et $z = z_0$

c'est-à-dire que la condition 2 est remplie

Dérivons; on a:

$$y' = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^{x} f(x, y, z)\, dx$$

Mais d'après les théorèmes connus:

$$\frac{d}{dx} \int_{x_0}^{x} f(x, y, z)\, dx = f(x, y, z)$$

On a donc:

$$y' = f(x, y, z)$$

On a identiquement:

$$z' = g(x, y, z)$$

Ainsi la condition 1 est remplie aussi

3) Montrons que c'est l'unique solution.

En effet supposons qu'il y en ait deux:

y et Y $\quad$ z et Z

Nous pourrons écrire :

$$|y-Y| = \left|\int_{x_0}^{x}[f(x,y,z)-f(x,Y,Z)]dx\right| \leq K_1\int_{x_0}^{x}\big[|y-Y|+|z-Z|\big]dx$$

$$|z-Z| = \left|\int_{x_0}^{x}[g(x,y,z)-g(x,Y,Z)]dx\right| \leq K_2\int_{x_0}^{x}\big[|y-Y|+|z-Z|\big]dx$$

Et en additionnant et en posant :

$$|y-Y|+|z-Z| = v$$

$$K = K_1+K_2$$

$$v \leq K\int_{x_0}^{x} v\,dx \qquad (1)$$

Supposons

$$0 < |x-x_0| < a$$

L'inégalité (1) subsiste pour tous les v et si v_{max} est la valeur maximum de v dans l'intervalle x_0 et a et si x_1 est la valeur de x correspondante à ce maximum on aura en appliquant l'inégalité (1)

$$v_{max} \leq K\int_{x_0}^{x_1} v\,dx \leq K v_{max}(x_1-x_0) \qquad \text{(théorème de la moyenne)}$$

Ainsi :

$$v_{max} \leq K v_{max}(x_1-x_0) \leq K v_{max}\, a$$

ou en divisant par v_{max} qui est toujours positif :

$$1 \leq Ka \qquad (2)$$

Or a est un nombre arbitraire et l'inégalité (2) pour les a très petits quelconques peut conduire à une absurdité. Aussi il faut éliminer la cause d'erreur c'est-à-dire il faut écrire :

$$v_{max} = 0$$

et par suite v est toujours nul ce qui entraîne or:

$$|y - Y| + |z - Z| = v = 0$$

que $y = Y \quad z = Z$

Ainsi le théorème est démontré. On le démontrerait de même pour une ~~differ~~ équation différentielle d'ordre quelconque. On aura alors par exemple n équations différentielles de 1er ordre. Seulement les fonctions $y(x)$ seront des dérivées. Ainsi soit donné:

$$y^{(n)} = f(x, y, y' \ldots \ldots y^{n-1})$$

On aura un système de n équations et si l'on connait les valeurs:

$$y(x_0) \;,\; y'(x_0) \;,\; y''(x_0) \ldots \ldots \ldots y^{n-1}(x_0)$$

on aura d'après le théorème ci-dessus pourvu que la condition soit remplie une solution et une seule passant par x_0, y_0, z_0

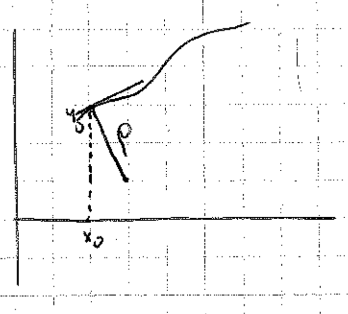
Etude de l'équation du second ordre

Une équation différentielle ~~peut~~ de second ordre peut s'écrire sous la forme:

$$y'' = f(x, y, y')$$

Signification géométrique

Considérons un point $x_0 . y_0$ du plan xoy



Nous avons vu que pour que y'' ait un sens il faut que l'on donne

$$y'(x_0) = y'_0$$

Ainsi nous connaissons au point $x_0 . y_0$ une direction y'_0. Ceci a lieu pour tous les points x, y du plan.

Considérons une courbe qui passe par le point x_0, y_0. L'expression du rayon de courbure de cette courbe au point considéré sera:

$$\rho = \frac{[1 + y_0'^2]^{3/2}}{y''_0}$$

Nous connaissons y'_0 et y''_0 nous est donné par l'équation

$$y'' = f(x, y, y')$$

Ainsi aussi nous aurons immédiatement ρ sans avoir l'équation de la courbe.
On peut dire ceci pour chaque point du plan
Ainsi on peut dire que:

L'équation du second ordre $y'' = f(x, y, t)$ exprime une relation entre les coordonnées d'un point quelconque d'une courbe, la pente de sa tangente au point considéré et le rayon du cercle de courbure au même point.

<u>Cas spéciaux d'une équation de second ordre.</u>

I. — $y'' = \varphi(x)$

$$\frac{dy'}{dx} = \varphi(x)$$

$$y' = \int \varphi(x) + C$$

Si l'on suppose que l'on donne les conditions initiales:

$$x = x_0$$
$$y = y_0$$
$$y' = y'_0$$

On alors immédiatement la forme:

$$y' = \int_{x_0}^{x} \varphi(x) + y'_0$$

car pour $x = x_0$ $y' = y'_0$

En intégrant immédiatement y' il vient:

$$y = y'_0 x + \int dx \int_{x_0}^{x} \varphi(x) dx + C$$

En tenant compte des conditions initiales et en écrivant que:

$$\int dx \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\, dx = \int dx \int_{x_0}^{x} \varphi(\xi)\, d\xi$$

ce qu'on a toujours le droit de faire, on aura

$$y = y'_0 x + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} \varphi(\xi)\, d\xi) + y_0 - y'_0 x_0$$

On voit immédiatement que pour $x = x_0$, $y = y_0$

Or il est facile d'intégrer par parties ~~l'éq~~ l'intégrale:

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} \varphi(\xi)\, d(\xi)$$

Soit $\int_{x_0}^{x} \varphi(\xi)\, d(\xi) = u$ $\qquad \int_{x_0}^{x} dx = v$

on a:

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} \varphi(\xi)\, d\xi = x \int_{x_0}^{x} \varphi(\xi)\, d(\xi) \Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} x\, \varphi(x)\, dx$$

$$= x \int_{x_0}^{x} \varphi(\xi)\, d\xi - \int_{x_0}^{x} \xi\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} \varphi(\xi)\, d\xi = \int_{x_0}^{x} (x - \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

car x est constant par rapport à ξ

Ainsi on a en définitive:

$$y = y_0 + y'_0 (x - x_0) + \int_{x_0}^{x} (x - \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

c'est la solution et la question de savoir si la quadrature pourra s'effectuer ou non ne nous intéresse pas.

II $y'' = \varphi(y)$

Multiplions les deux membres par le facteur intégrant y' On a:

$$y' y'' = \varphi(y)\, y'$$

Le premier membre est la dérivée de: $\frac{1}{2} y'^2$ p/rapport à x

Le second est la dérivée de $\int^{y} \varphi(y)\, dy$ fonction de sa limite supérieure y, par rapport à x

On aura donc :

$$\frac{1}{2} y'^2 = \int^y \varphi(y)\, dy + C$$

Si l'on tient compte des conditions initiales on aura :

$$\frac{1}{2} y'^2 = \int_{y_0}^{y} \varphi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2} y_0'^2$$

(pour $x = x_0$ ou $y = y_0$ il faut que $y' = y'_0$)

On tire que :

$$y' = \sqrt{y_0'^2 + 2\int_{y_0}^{y} \varphi(\xi)\, d\xi}$$

Soit : $$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y_0'^2 + 2\int_{x_0}^{x} \varphi(\xi)\, d\xi}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y_0'^2 + 2\int_{x_0}^{x} \varphi(\xi)\, d\xi}} = dx$$

En intégrant et en tenant compte des conditions initiales on a :

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{y_0'^2 + 2\int_{y_0}^{y} \varphi(\xi)\, d\xi}} + x_0$$

qui définit l'intégrale cherchée

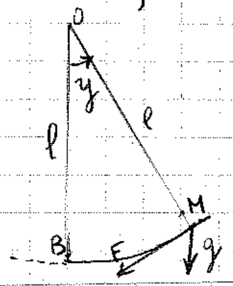
On rencontre ces équations $y'' = \varphi(y)$ très ou $y'' = \varphi(x)$ fréquemment en physique et surtout en mécanique

Rappelons que la loi de Newton considère toujours les accélérations. Alors si l'on considère y comme la trajectoire et x comme le temps on voit que :

a/ pour $y'' = \varphi(x)$ l'accélération est proportionnelle au temps

b/ pour $y'' = \varphi(y)$ l'accélération est proportionnelle au chemin parcouru.

Exemple du pendule



Nous supposerons ~~que la masse pendulaire est l'unité de masse~~ et que le poids du fil est négligeable.

Nous désignerons par y l'angle du fil avec la verticale et par x le temps

Les forces agissant sur le point M sont : la pesanteur et la force F dirigée suivant la tangente à la trajectoire de M. Si l'on ~~consuge~~ considère l'accélération angulaire

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''$$

on aura que :

$$F = m l y''$$

et en projetant P sur F et en notant que l'angle y est mesuré de OB vers OM (c'est-à-dire que ly'' est de signe contraire à g sin y projection de P sur F) on aura :

$$l y'' = - g \sin y$$

En posant $\frac{g}{l} = k^2$

on a : $y'' = -k^2 \sin y$

Supposons que les conditions initiales soient les suivantes :

supposons qu'au temps $x = 0$ la vitesse de M soit nulle, c'est-à-dire $y'_0 = 0$. De plus en ce pelte position soit $y_0 = y_0$

Nous avons

$$y'' = - k^2 \sin y$$

c'est le cas $y'' = \varphi(y) = - k^2 \sin y$

Alors : $\varphi(\xi) \doteq -k^2 \sin \xi$

Alors : $$\int_{y_0}^{y} \varphi(\xi)\, d\xi = k^2 \Big| \cos \xi \Big|_{y_0}^{y} = k^2 (\cos y - \cos y_0)$$

Or : $$\cos y = 1 - 2\sin^2 \frac{y}{2}$$

$$\cos y_0 = 1 - 2\sin^2 \frac{y_0}{2}$$

Alors :

$$\int_{y_0}^{y} \varphi(\xi)\, d\xi = 2k^2 \left[\sin^2 \frac{y_0}{2} - \sin^2 \frac{y}{2} \right]$$

Alors on aura en remarquant que $y'_0 = 0$

$$x = \frac{1}{2k} \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{\sin^2 \frac{y_0}{2} - \sin^2 \frac{y}{2}}}$$

17/12/1934

Nous avons trouvé :

$$x = \frac{1}{2K}\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{\sin^2\frac{y_0}{2} - \sin^2\frac{y}{2}}}$$

C'est une intégrale elliptique. Elle ne s'exprime pas à l'aide des fonctions élémentaires. On peut en indiquer la solution à l'aide des séries. A cet effet posons :

$$\sin\frac{y_0}{2} = a$$

Comme $y < y_0$ on a :

$$\sin\frac{y}{2} < \sin\frac{y_0}{2}$$

$$\sin\frac{y}{2} < a$$

$$\frac{\sin y/2}{a} < 1$$

On peut donc poser : $\frac{\sin y/2}{a} = \sin\varphi$ ou

$$\sin y/2 = a\sin\varphi \qquad (1)$$

On voit que :

pour $y = 0$ $\qquad \varphi = 0$

pour $y = y_0$ $\qquad \varphi = \pi/2$

En dérivant (1) il vient :

$$\frac{1}{2}\cos y/2 \, dy = a\cos\varphi \, d\varphi \qquad (2)$$

D'autre part l'intégrale devient :

$$x = \frac{1}{2K}\int_{\pi/2}^{\varphi} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{2K}\int_{\pi/2}^{\varphi}\frac{dy}{a\cos\varphi}$$

De (2) on tire : $\frac{dy}{\cos\varphi} = \frac{2a\,d\varphi}{\cos y/2} = \frac{2a\,d\varphi}{a\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}$

D'où : $x = \frac{1}{2K}\int_{\pi/2}^{\varphi}\frac{2a\,d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{K}\int_{\pi/2}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}$

<u>Remarque</u> :

Nous avons supposé que x était compté de y_0 vers la verticale. Aussi les limites de l'intégrales étaient y_0 à y. Aussi φ varie de φ à $\pi/2$ à φ

Toutefois on peut compter x en sens inverse aussi. C'est pourquoi ces limites peuvent être inversées. D'ailleurs le signe du radical influe justement sur ceci. Mais comme nous ne considérons que les valeurs absolues de ... on peut ne pas tenir compte de ces relations.

Nous savons que : $a < 1$ $\sin^2\varphi < 1$

Donc $a^2\sin^2\varphi < 1$. On peut donc décomposer

$\frac{1}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}$ en série infinie suivant la règle du binôme :

$$(1-a^2\sin^2\varphi)^{-1/2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-a^2\sin^2\varphi)^{\nu} \frac{-\frac{1}{2}\cdot-\frac{3}{2}\cdot-\frac{5}{2}\cdots-\frac{2\nu-1}{2}}{1.2.3\ldots\ldots\nu}$$

Le signe $-$ est répété ν fois dans $(-a^2\sin^2\varphi)^{\nu}$ et ν fois aussi dans la fraction. Nous aurons donc un signe plus. En prenant au dénominateur le facteur 2^{ν} on a :

$$(1-a^2\sin^2\varphi)^{-1/2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2\nu-1)}{\nu!\,2^{\nu}} (a^2\sin^2\varphi)^{\nu}$$

Alors :

$$x = \frac{1}{K}\int_{\pi/2}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{K}\sum_{\nu=0}^{\infty} a^{2\nu}\frac{1.3.5\ldots(2\nu-1)}{\nu!\,2^{\nu}}\int_{\pi/2}^{\varphi}\sin^{2\nu}\varphi\, d\varphi$$

car la série est uniformément convergente.

Nous avons vu dans le cours I que :

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2\nu}\varphi\, d\varphi = \frac{1.3\ldots(2\nu-1)}{2^{\nu}\nu!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Si donc nous cherchons l'amplitude de la période du pendule (nous faisons varier φ de 0 à $\pi/2$ en tenant compte aussi de la remarque) nous aurons :

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{K}\sum_{\nu=0}^{\infty} a^{2\nu}\frac{1.3\ldots(2\nu-1)}{2^{\nu}\nu!}\int_0^{\pi/2}\sin^{2\nu}\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{K}\sum_{\nu=0}^{\infty} a^{2\nu}\frac{1.3\ldots(2\nu-1)}{2^{\nu}\nu!}\cdot\frac{1.3\ldots(2\nu-1)}{2^{\nu}\cdot\nu!}\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{K}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(a^{\nu}\frac{1.3\ldots(2\nu-1)}{2^{\nu}\nu!}\right)^2\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2K}\left(1 + a^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + a^4\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \cdots\right)$$

Et en remplaçant K par sa valeur:

$$K = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{ou}$$

$$\frac{1}{K} = \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{on a:}$$

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}}\ \frac{\pi}{2}\left[1 + a^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + a^4\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \cdots\right]$$

Or a est assez petit. a^2 l'est encore plus. De plus les coefficients sont assez petits. Aussi on peut négliger à partir de a^2 et on a alors:

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}}\ \frac{\pi}{2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

qui est la période exposée dans les traités élémentaires.

On aurait pu arriver à ce résultat directement. Nous avions:

$$y'' = -K^2 \sin y$$

Pour les y assez petits on peut ~~néglig~~ écrire:

$$y'' = -K^2 \sin y \sim -K^2 y$$

$$y'' = -K^2 y$$

La solution générale de cette équation est:

$$y = A\cos Kx + B\sin Kx.$$

Démontrons à ce propos le Théorème suivant:

__Théorème__

La solution générale de l'équation linéaire d'ordre n:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} \cdots\cdots + a_n y = b$$

où $a_1, a_2 \ldots$ sont des coefficients constants ou des fonctions de x qui dépend de n conditions arbitraires, peut être déterminée

si l'on connaît une intégrale particulière de l'équation et autant de solutions particulières de l'équation sans second membre, qu'il est nécessaire pour avoir n constantes arbitraires.

Démonstration

Puisque $y_1(x)$ est une solution on a:

$$y_1^{(n)}(x) + a_1 y_1^{(n-1)}(x) + \dots \dots a_n y_1(x) = b \qquad (1)$$

Soient $Y_1(x)$, $Y_2(x) \dots Y_\nu(x) \dots$

les solutions de l'équation sans second membre.

D'une manière générale on a:

$$Y_\nu^{(n)} + a_1 Y_\nu^{(n-1)} + a_2 Y_\nu^{(n-2)} \dots \dots a_n Y_\nu = 0 \qquad (2)$$

$\nu = 1, 2, 3 \dots$

Nous pouvons écrire des égalités analogues pour tous les Y_ν.

Si nous ajoutons ~~tous~~ l'égalité (1) avec toutes les égalités (2) et en ordonnant on aura:

$$(3) \left(y_1^{(n)} + A_1 Y_1^{(n)} + A_2 Y_2^{(n)} \dots\right) + a_1\left(y^{(n-1)} + A_1 Y_1^{(n-1)} + A_2 Y^{(n-2)} \dots\right) + = b$$

Soit une fonction y définie par:

$$y = y_1 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + \dots$$

Montrons que c'est la solution cherchée.

En effet dans (3) nous avons que les termes entre parentèses sont les dérivées successives de y.

On aura donc pour (3):

$$y^n + a_1 y^{(n-1)} \dots \dots \dots = b$$

ainsi on voit bien que la fonction y que nous avons posé remplit l'équation différentielle.

Application

Nous avons:

$$y'' = -k^2 y$$

ou $\quad y'' + k^2 y = 0$

Ici $\quad n = 2 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = k^2 \quad , b = 0$

Nous connaissons les deux intégrales particulières:

$y_1 = \cos kx \quad$ et $\quad y_2 = \sin kx \quad$. En effet:

$$y_1' = -k \sin kx \qquad y_2' = k \cos kx$$

$$y_1'' = -k^2 \cos kx \qquad y_2'' = -k^2 \sin kx$$

~~On a~~
On voit bien que: $y'' + k^2 y = 0$. On aussi que $y = 0$ est une solution.
L'équation sera donc de la forme:

$$y^* = A \sin kx + B \cos kx$$

18/12/1934

Nous avons vu que si l'on connait une intégrale particulière de l'équation linéaire de k^{me} ordre et n solutions de l'équation sans second membre.
Toutefois il faut que ces solutions soient indépendantes c'est-à-dire qu'il n'existe pas $c_1, c_2, c_3 \ldots$ coefficients tels que:

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots\ldots c_n y_n \equiv 0$$

Dans le cas contraire les $y_1, y_2 \ldots$ sont dépendants

Par exemple:

x, x^2, x^3 sont indépendants car on ne peut trouver c_1, c_2, c_3 tels que

$$c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \equiv 0 \qquad \text{quelque soit } x.$$

Mais : $x, x^2, ax^2 - bx$ sont dépendants car on peut avoir $c_1 = +b$ $c_2 = -a$ tels que :

$$bx - ax^2 + ax^2 - bx \equiv 0$$

Dans le cas d'indépendance on écrit :

$$c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \dots \not\equiv 0$$

Dans l'équation différentielle linéaire, l'expression

$$A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + \dots A_n Y_n \not\equiv 0$$

s'appelle *système fondamental*.

On peut donc résoudre l'équation linéaire connaissant une intégrale particulière de l'équation et un système fondamental.

<u>Exemple</u>

$$y'' + K^2 y = x$$

Une intégrale particulière est :

$$y_1 = \frac{x}{K^2}$$

car $y'' = 0$ on aura bien :

$$K^2 \cdot \frac{x}{K^2} \equiv x$$

On connaît d'autre part les intégrales de l'équation sans second membre :

$$Y_1 = \sin Kx \qquad Y_2 = \cos Kx$$

D'où :

$$y = \frac{x}{K^2} + A_1 \sin Kx + A_2 \cos Kx$$

Méthode pour trouver un système fondamental d'une équation linéaire d'ordre n

Le système fondamental est la solution de l'équation

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots a_n y = 0 \qquad (I)$$

Cherchons si l'équation $y = e^{Kx}$ ne remplit pas l'équation ci-dessus.

On a:

$$y = e^{Kx}$$
$$y' = K e^{Kx} = Ky$$
$$y'' = Ky' = K^2 y$$
$$\dots$$
$$y^{(n)} = K^n y = K^n e^{Kx}$$

D'où :

$$e^{Kx}\left[K^n + a_1 K^{n-1} + a_2 K^{n-2} + \dots a_{n-1} K + a_n\right] = 0$$

e^{Kx} ne peut s'annuler. On a donc:

$$\varphi(K) = K^n + a_1 K^{n-1} + \dots a_{n-1} K + a_n = 0 \qquad (II)$$

cette équation est appelée : équation caractéristique de l'équation (I).

Soit K_1 une solution de (II). On a:

$$\varphi(K_1) = 0$$

et $e^{K_1 x}$ est une solution.

Ainsi il faut connaître les racines de l'équation caractéristique.

Si l'on suppose que $\varphi(K)$ a n racines simples (par suite indépendantes) on a alors immédiatement les solutions:

$$e^{K_1 x},\ e^{K_2 x},\ e^{K_3 x} \dots$$

et par suite:

$$y = A_1 e^{K_1 x} + A_2 e^{K_2 x} \dots + A_n e^{K_n x}$$

Les n racines peuvent être réelles ou imagi-

naires. Nous verrons plus tard le cas où elles sont imaginaires.

Cas où l'équation caractéristique n'a pas ses racines simples.

On a une grave difficulté car dans ce cas les K_1 K_2, K_3 ... ne sont plus indépendants.

On peut écrire d'une manière générale :

$$\varphi(K) = K^n + a_1 K^{n-1} \dots + a_n = 0 = (K-K_1)(K-K_2)\dots(K-K_n) = 0$$

Introduisons les symboles suivants :

$\frac{d}{dx}$ qui indique l'opération de dérivation de y.

On peut écrire :

$$\frac{d}{dx} y + \alpha y = y\left(\frac{d}{dx} + \alpha\right)$$

De même :

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha \frac{d}{dx} + \beta\right) y = y'' + \alpha y' + \beta y$$

Les termes entre parenthèses sont dits : opérateurs.

On peut constater que :

$$\left[\frac{d}{dx} + \beta\right]\left[\left(\frac{d}{dx} + \alpha\right) y\right] = \left(\frac{d}{dx} + \beta\right)\left(\frac{d}{dx} + \alpha\right) y = \frac{d^2}{dx^2} + (\alpha+\beta)\frac{d}{dx} + \alpha\beta$$

car :

$$\left[\frac{d}{dx} + \beta\right]\left[y' + \alpha y\right] = y'' + \alpha y' + \beta[y' + \alpha\beta y]$$

$$= y'' + (\alpha+\beta) y' + \alpha\beta y$$

$$= \left(\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha+\beta)\frac{d}{dx} + \alpha\beta\right) y$$

En employant ces notations l'équation (I) s'écrit :

$$y\left(\frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \dots + a_n\right) = 0$$

on pourra écrire aussi :

$$\left(\frac{d}{dx} - K_1\right)\left(\frac{d}{dx} - K_2\right) \dots \left(\frac{d}{dx} - K_n\right) y = 0$$

Nous avons vu qu'on pouvait mettre l'équation différentielle linéaire à coefficients constants sous la forme:

$$\left(\frac{d}{dx} - K_1\right)\left(\frac{d}{dx} - K_2\right) \cdots \left(\frac{d}{dx} - K_n\right) y = 0$$

Cette expression signifie que l'opération est répétée n fois sur y.

Cette expression a deux propriétés:

I/ si la dernière opération sur y (ou plutôt la première)

$$\left(\frac{d}{dx} - K_n\right) y$$

est nulle:

$$\left(\frac{d}{dx} - K_n\right) y = 0$$

les autres opérations seront nulles aussi car on opère sur 0. Par suite l'équation sera vérifiée.

II/ On peut changer l'ordre des opérations car d'après nos conventions un produit d'opérateurs s'effectue comme un produit algébrique et justement dans un produit algébrique l'ordre des facteurs n'importe pas.

<u>Conséquences de ces propriétés</u>

La première propriété donne:

$$\left(\frac{d}{dx} - K_n\right) y = 0$$

ou $\quad y' - K_n y = 0$

c'est une équation différentielle du 1er ordre, très simple dont la solution est:

$$y = e^{K_n x}$$

D'après la 2e propriété on peut faire annuler tous les opérateurs successivement. On aura alors les solutions cherchées:

$$e^{K_1 x},\ e^{K_2 x},\ e^{K_3 x} \ldots\ldots\ e^{K_n x}$$

qui sont les ~~valeurs~~ solutions particulières de l'équation.

Mais si les $K_1, K_1 \ldots$ ne sont pas des racines simples de l'équation caractéristiques, on n'a plus aucun n solutions indépendantes.
On emploie alors la méthode suivante.

Soient : $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_r$ les valeurs de chaque racine multiple et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$ leur degré de multiplicité.

$$K_1 = K_2 = K_3 = K_4 \ldots = K_{\lambda_1} = \alpha_1$$

$$K_{\lambda_1+1} = K_{\lambda_1+2} = K_{\lambda_1+3} \ldots = K_{\lambda_2} = \alpha_2$$

- - - - - - - - - - - - - -

Evidemment : $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \alpha_4 \ldots \neq \alpha_r$ et

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_r = n$$

Avec ces conventions l'équation différentielle pourra s'écrire sous la forme :

$$\left(\frac{d}{dx} - \alpha_1\right)^{\lambda_1} \left(\frac{d}{dx} - \alpha_2\right)^{\lambda_2} \ldots \left(\frac{d}{dx} - \alpha_r\right)^{\lambda_r} y = 0$$

Appliquons à cette équation les deux propriétés que nous avons indiquées ci-dessus.

Nous savons que :

$$\left(\frac{d}{dx} - \alpha_r\right)^{\lambda_r} y = 0 \qquad (1)$$

est une solution de l'équation. Mais cette équation (1) est d'ordre λ_r. Montrons que la fonction :

$$y = e^{\alpha_r x} . x^m \qquad (2)$$

est solution de l'équation (1) pourvu que :

$$m = 0, 1, 2, \ldots (\lambda_r - 1) \qquad m < \lambda_r$$

et soit un entier.

En effet :

$$\left(\frac{d}{dx} - \alpha_r\right) y = e^{\alpha_r x} \left[\alpha_r x^m + m x^{m-1} - \alpha_r x^m\right]$$

$$= m x^{m-1} e^{\alpha_r x}$$

De même

$$\left(\frac{d}{dx}-\alpha_2\right)^2 y = \left(\frac{d}{dx}-\alpha_2\right) m x^{m-1} e^{\alpha_2 x} = m(m-1)x^{m-2} e^{\alpha_2 x} = e^{\alpha_2 x}\frac{d^2 x^m}{dx^2}$$

$$\left(\frac{d}{dx}-\alpha_2\right)^{m+1} y = e^{\alpha_2 x}\frac{d^{m+1}(x^m)}{dx^{m+1}}$$

Mais $\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^m) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^m(x^m)}{dx^m}\right) = \frac{d}{dx}(1) = 0$

Ainsi :

$$\left(\frac{d}{dx}-\alpha_2\right)^{m+1} y = e^{\alpha_2 x}\frac{d^{m+1}(x^m)}{dx^{m+1}} = 0$$

c'est-à-dire que :

$$\left(\frac{d}{dx}-\alpha_2\right)^{\lambda_2} y = 0$$ est vérifiée

pour tous les m inférieurs à λ_2. ~~ou~~

On aura ainsi λ_2 solutions car :

$$m = 0, 1, 2, 3 \dots (\lambda_2 - 1)$$

pour l'équation $\left(\frac{d}{dx}-\alpha_2\right)^{\lambda_2} y = 0$

Ces solutions seront de la forme :

$$e^{\alpha_2 x}\, x^m$$

On peut faire, en vertu de la 2e propriété les mêmes considérations pour chaque opérateur

On aura donc en tout :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \dots + \lambda_r = n \quad \text{solutions :}$$

$$e^{\alpha_1 x},\ x e^{\alpha_1 x},\ x^2 e^{\alpha_1 x},\ x^3 e^{\alpha_1 x} \dots x^{\lambda_1 - 1} e^{\alpha_1 x}$$

$$e^{\alpha_2 x},\ x e^{\alpha_2 x},\ x^2 e^{\alpha_2 x},\ x^3 e^{\alpha_2 x} \dots x^{\lambda_2 - 1} e^{\alpha_2 x}$$

— — — — — — — — — — — —

$$e^{\alpha_r x},\ x e^{\alpha_r x},\ x^2 e^{\alpha_r x},\ x^3 e^{\alpha_r x} \dots x^{\lambda_r - 1} e^{\alpha_r x}$$

Alors l'équation différentielle :

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots \, a_n y = 0$$

aura sa solution générale de la forme :

$$y(x) = P_1 e^{\alpha_1 x} + P_2 e^{\alpha_2 x} + P_3 e^{\alpha_3 x} + \dots + P_r e^{\alpha_r x}$$

où $P_1, P_2, P_3 \dots$ sont des polynomes en x.

$$P_1 = c_0 + c_1 x + \dots \dots c_{\lambda_1} x^{\lambda_1 - 1}$$

$$P_2 = c_0 + c_2 x + \dots + c_{\lambda_2} x^{\lambda_2 - 1}$$

— — — — — — — — —

à coefficients constants.

Exemple.

Soit l'équation :

$$y'' - 2ay' + a^2 y = 0$$

L'équation caractéristique est :

$$K^2 - 2aK + a^2 = 0$$

$K = a$ est une racine double

La solution est donc :

$$y = Ae^{ax} + Bxe^{ax} = e^{ax}[A + Bx]$$

Cas où l'équation caractéristique a des racines imaginaires

Comme l'équation caractéristique a ses coefficients réels il s'ensuit que les racines imaginaires se présentent par paires :

$$K_1 = \lambda + \mu i \qquad K_2 = \lambda - \mu i$$

Les solutions correspondantes seront :

$$y = A_1 e^{K_1 x} + A_2 e^{K_2 x}$$

Comme A_1 et A_2 sont des constantes arbitraires nous pouvons prendre :

$$A_1 = B + Ci \qquad , A_2 = B - Ci$$

Dans ce cas on aura:

$$y = (B+Ci)e^{(\lambda+\mu i)x} + (B-Ci)e^{(\lambda-\mu i)x} \qquad (1)$$

$$y = e^{\lambda x}\left[B\left[e^{\mu i x} + e^{-\mu i x}\right] + Ci\left(e^{\mu i x} - e^{-\mu i x}\right)\right]$$

Mais nous savons que:

$$e^{\mu i x} + e^{-\mu i x} = 2\cos\mu x$$

et: $$\frac{e^{\mu i x} - e^{-\mu i x}}{2i} = \sin\mu x$$

ou: $$e^{\mu i x} - e^{-\mu i x} = 2i\sin\mu x$$

En remplaçant $e^{\mu i x} + e^{-\mu i x}$ et $e^{\mu i x} - e^{-\mu i x}$ par leurs valeurs dans l'équation (1) on aura:

$$y = 2e^{\lambda x}\left[B\cos\mu x - C\sin\mu x\right]$$

car $$i^2 = -1$$

Ainsi à chaque paire de racines imaginaires ou ce qui est la même chose à chaque racine imaginaire correspond la solution:

$$y = 2e^{\lambda x}\left[B\cos\mu x - C\sin\mu x\right]$$

où B et C sont des constantes arbitraires qui est en réalité deux solutions distinctes

$$2e^{\lambda x}B\cos\mu x \quad \text{et} \quad -2e^{\lambda x}C\sin\mu x$$

Dans le cas où l'on a des ~~sol.~~ racines $\lambda+\mu i$ et $\lambda-\mu i$

qui multiples de degré s, on aura 2s solutions distinctes obtenues en multipliant

$$e^{\lambda x}\cos\mu x \quad \text{et} \quad e^{\lambda x}\sin\mu x$$

par des polynomes de x.

$$y = P_1 e^{\lambda x}\cos\mu x + P_2 e^{\lambda x}\sin\mu x$$

Équation différentielle linéaire de la forme :

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-1)} + \cdots a_n y^{*} = b(x)$$

où les coefficients a, sont des constantes.

Remarques

Supposons $b(x) = b_1(x) + b_2(x)$

où b_1 et b_2 sont des fonctions de x

Si nous indiquons par y et y les solutions de l'équation égale respectivement à $b_1(x)$ et $b_2(x)$ nous avons :

$$y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + a_2 y_2^{(n-2)} + \cdots a_n y_1 = b_1(x)$$

$$y_2^{(n)} + a_1 y_2^{(n-1)} + a_2 y_2^{(n-2)} + \cdots a_n y_2 = b_2(x)$$

En additionnant il vient :

$$y_1^{(n)} + y_2^{(n)} + a_1 \left(y_1^{(n-1)} + y_2^{(n-1)} \right) + \cdots a_n (y_1 + y_2) = b_1(x) + b_2(x) = b(x)$$

Nous voyons que l'équation directe égale à $b(x)$ aura sa solution :

$$y = y_1 + y_2$$

Il est évident que si $b(x) = b_1 + b_2 + b_3 \cdots$

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots$$

où $y_1, y_2, y_3 \cdots$ sont les solutions de l'équation égalée respectivement à $b_1, b_2, b_3 \cdots$

De même si les $b_1, b_2, b_3 \ldots$ sont multipliées par des constantes, la solution générale est aussi multipliée par ces constantes.

D'une manière générale si $b(x)$ est une combinaison linéaire de fonctions de x c'est-à-dire que :

$$b(x) = A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3 \cdots$$

la solution générale de l'équation sera une

combinaison linéaire identique des solutions y_i de l'équation égalée respectivement à chacune des fonctions qui constituent $b(x)$.

En d'autres termes si :

$$b(x) = A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3 + \dots$$

$$y = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + \dots$$

Toutes ces considérations sont vraies même si les coefficients $a_1, a_2, a_3, \dots$ sont des fonctions de x seulement.

<u>Cas où $b(x) = x^m e^{\alpha x}$</u>

m et α sont des constantes arbitraires.

L'équation prend la forme :

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = x^m e^{\alpha x}$$

Les équations pour lesquelles :

$$b(x) = P e^{\alpha x}$$

ou plus généralement :

$$b(x) = P_1 e^{\alpha_1 x} + P_2 e^{\alpha_2 x} + \dots$$

où $P, P_1, P_2 \dots$ sont des polynômes en x de degré quelconque, se ramènent à l'équation indiquée ci-dessus :

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = x^m e^{\alpha x}$$

L'équation caractéristique est :

$$\varphi(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

Au lieu de k introduisons l'opérateur : $\frac{d}{dx}$

Nous aurons :

$$\varphi\left(\frac{d}{dx}\right) = \left(\frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \dots + a_n\right)$$

En faisant l'opération sur y nous aurons:

$$\left\{\varphi\left(\frac{d}{dx}\right)\right\}y = \left(\frac{d^n}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots a_n\right)y = x^m e^{\alpha x} \qquad (2)$$

car $\left(\frac{d^n}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_n\right)y$ est une autre forme de l'équation différentielle.

Faisons maintenant un changement de variable inconnue $z(x)$ définie par:

$$y = z(x)\, e^{\alpha x}$$

ou $$z(x) = y e^{-\alpha x}$$

Montrons qu'il existe toujours un polynôme $z(x)$ tel que

$$z(x)\, e^{\alpha x}$$

soit une solution de l'équation.

En effet on peut écrire:

$$\frac{d}{dx}\left(z e^{\alpha x}\right) = e^{\alpha x}\left[\frac{dz}{dx} + \alpha z\right] = e^{\alpha x}\left[\frac{d}{dx} + \alpha\right]z$$

De même:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(z e^{\alpha x}\right) = e^{\alpha x}\left[\frac{d^2 z}{dx^2} + \alpha\frac{dz}{dx} + \alpha\frac{dz}{dx} + \alpha^2 z\right] = e^{\alpha x}\left[\frac{d}{dx} + \alpha\right]^2 z$$

D'une manière générale:

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}\left(z e^{\alpha x}\right) = e^{\alpha x}\left(\frac{d}{dx} + \alpha\right)^\nu z$$

En remplaçant y par $z e^{\alpha x}$ dans (2) nous aurons.

$$\left\{\varphi\left(\frac{d}{dx}\right)\right\} z e^{\alpha x} = \left\{\varphi\left(\frac{d}{dx} + \alpha\right)^{n}\right\} z\, e^{\alpha x} = e^{\alpha x} x^m$$

ou:

$$\left\{\varphi\left(\frac{d}{dx} + \alpha\right)^{n}\right\} z = x^m$$

c'est une équation de n° ordre pour z mais

dont le second membre est simplifié.

Supposons:

$$-\alpha \neq K_1, K_2, K_3 \ldots$$

$K_1, K_2, K_3, \ldots$ étant les racines de l'équation caractéristique.

Dans ce cas la fonction:

$\frac{1}{\varphi(K+\alpha)}$ est continue.

On peut donc la développer suivant la formule de Taylor ou de Mac Laurin et écrire:

$$\frac{1}{\varphi(K+\alpha)} = A_0 + A_1 K + A_2 K^2 + \cdots + A_n K^n + K^{n+1} \frac{M}{\varphi(K+\alpha)}$$

Les $A_0, A_1 \ldots A_n$ sont des coefficients bien déterminés et le terme: $K^{n+1} \frac{M}{\varphi(K+\alpha)}$ où M est une fonction de K représente le reste

En chassant le dénominateur on peut écrire:

$$1 = \varphi(K+\alpha)\left[A_0 + A_1 K + A_2 K^2 + \cdots A_n K^n\right] + K^{n+1} M$$

Au lieu de K introduisons l'opérateur $\frac{d}{dx}$. Nous aurons la forme:

$$x^m = \varphi\left(\frac{d}{dx}+\alpha\right)\left[A_0 + A_1\frac{d}{dx} + A_2\frac{d^2}{dx^2} + \cdots A_m \frac{d^m}{dx^m}\right]x^m + M.\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}x^m$$

Mais: $\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}x^m = 0$

Donc: $$x^m = \varphi\left(\frac{d}{dx}+\alpha\right)\left[A_0 + A_1\frac{d}{dx} + A_2\frac{d^2}{dx^2} \cdots + A_m\frac{d^m}{dx^m}\right]x^m$$

[En introduisant l'opérateur $\frac{d}{dx}$ il faut aussi effectuer l'opération sur 1 qui est dans le 1er premier membre $1 = K^0$ et alors nous aurons bien x^m]

Mais nous avons trouvé :

$$x^m = \left\{\varphi\left(\frac{d}{dx}+\alpha\right)\right\} z$$

On voit bien que :

$$z = \left[A_0 + A_1 \frac{d}{dx} + A_2 \frac{d^2}{dx^2} + \dots A_m \frac{d^m}{dx^m}\right] x^m$$

c'est un polynôme de degré m.

Ainsi on a trouvé un polynôme de degré m qui multiplié avec $e^{\alpha x}$ donne la solution.

Notons que si l'équation différentielle est donnée sous la forme :

$$\left\{\varphi\left(\frac{d}{dx}\right)\right\} y = P_m(x) e^{\alpha x}$$

où P_m est un polynôme en x de degré m

on aura :

$$\left\{\varphi\left(\frac{d}{dx}+\alpha\right)\right\} z = P_m(x)$$

où

$$z = \left[A_0 + A_1 \frac{d}{dx} + \dots A_m \frac{d^m}{dx^m}\right] P_m(x)$$

Pour le cas où $P_m = x^m$ on a :

$$z = A_0 x^m + A_1 m x^{m-1} + A_2 m(m-1) x^{m-2} + \dots A_m m!$$

et

$$y = \left(A_0 x^m + A_1 m x^{m-1} + A_2 m(m-1) x^{m-2} + \dots A_m m!\right) e^{\alpha x}$$

Nous supposons toujours que :

$$\varphi(K+\alpha) \neq 0$$

c'est-à-dire que : $\alpha \neq K_1, K_2, K_3 \dots K_m$

où K_1 K_2 ... sont les racines de $\varphi(K) = 0$

Exemple

$$y'' + y = x^2 e^x$$

Ici : $\varphi(k) = k^2 + 1$

$$k_{1,2} = \pm i$$

On a bien $\alpha = 1 \neq \pm i$

Ici $m = 2$.

Ainsi l'expression de z est un polynôme du 2e degré. Alors dans le developpement de $\frac{1}{\varphi(k+\alpha)}$ il suffit de prendre les termes jusqu'en k^2.

Alors on a en developpant $\frac{1}{\varphi(k+1)} = \frac{1}{(k+1)^2+1}$:

$$f(k) = \frac{1}{\varphi(k+1)} = \frac{1}{(k+1)^2+1} = A_0 + A_1 k + A_2 k^2 + \dots$$

Les coefficients A_0, A_1, A_2 sont donnés par les coefficients de la série de MacLaurin.

$$A_0 = \frac{1}{\varphi(0+1)} = \frac{1}{(0+1)^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$A_1 = f'(0) ; \qquad f'(k) = -\frac{2(k+1)}{[(k+1)^2+1]^2}$$

$$A_1 = f'(0) = -\frac{2(0+1)}{[(0+1)^2+1]^2} = -\frac{1}{2}$$

$$A_2 = \frac{1}{2!} f''(0) \quad ; \quad f''(k) = -\frac{2}{[(k+1)^2+1]^2} + \frac{2 \cdot 4\,[(k+1)]^2}{[(k+1)^2+1]^4}$$

$$A_2 = \frac{1}{4}$$

alors :

$$z = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{d}{dx} + \frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}\right] x^2$$

$$z = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$$

D'où

$$y = e^x \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right] \qquad \text{rep.}$$

Mais on emploie souvent la méthode des coefficients indéterminés pour le calcul de z.

Par exemple on sait que z est un polynôme de degré m. On écrit z sous forme indéterminée et on calcule les coefficients en faisant ~~expo~~ entrer l'expression arbitraire de $ze^{\alpha x}$ dans l'équation différentielle.

Ainsi dans notre exemple nous savons que z est du 2e degré. On écrira alors:

$$y = e^x [c_0 + c_1 x + c_2 x^2]$$

En appliquant la règle de Leibnitz pour le calcul de la dérivée seconde d'un produit :

$$f''(u,v) = u''v + 2u'v' + v''u$$

qui est donnée suivant le développement du binôme, on a:

$$y'' = e^x [c_0 + c_1 x + c_2 x^2] + 2e^x [c_1 + 2c_2 x] + e^x [2c_2]$$

$$y'' = e^x [c_0 + c_2 x^2 + 2c_1 + 4c_2 x + 2c_2]$$

Nous avons: $y = e^x [c_0 + c_1 x + c_2 x^2]$

En additionnant il vient:

$$y'' + y = e^x [2(c_0 + c_1 + c_2) + 2(c_1 + 2c_2)x + 2c_2 x^2] = x^2 e^x$$

Ainsi:

$$2(c_0 + c_1 + c_2) + 2(c_1 + 2c_2)x + 2c_2 x^2 = x^2$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de x on a:

$$c_0 + c_1 + c_2 = 0 \qquad c_1 + 2c_2 = 0 \qquad 2c_2 = 1$$

On a facilement de ces 3 équations:

$$c_0 = \tfrac{1}{2} \qquad c_1 = -1 \qquad c_2 = \tfrac{1}{2}$$

et alors:

$$y = e^x [\tfrac{1}{2} - x + \tfrac{1}{2} x^2]$$

qui est bien la réponse trouvée précédemment

<u>Cas où α est racine de l'équation $\varphi(\kappa)$</u>

L'égalité

$$\left\{\varphi\left(\frac{d}{dx}+\alpha\right)\right\} z = P_m(x)$$

a toujours lieu.

Si α est racine de $\varphi(\kappa)$ on a : $\varphi(\alpha) = 0$

et alors $\varphi(\kappa+\alpha)$ s'annule si l'on fait $\kappa = 0$

a/ <u>α est une racine simple de $\varphi(\kappa)$</u>

Dans ce cas $\varphi(\kappa)$ s'annule une seule fois pour $\kappa = \alpha$ et pour $\kappa = 0$ $\varphi(\kappa+\alpha)$ s'annule aussi.

Si au lieu de κ on introduit l'opérateur $\frac{d}{dx}$ on aura que pour $\kappa = 0$ ou $\frac{d}{dx} = 0$ c'est-à-dire une opération nulle sur z : $\left\{\varphi\left(\frac{d}{dx}+\alpha\right)\right\} z$ s'annule. Par suite on voit que le terme z n'existe pas. On a ainsi une ~~racine~~ équation différentielle d'ordre $(n-1)$ pour z' qui ne s'annule plus quand l'opérateur $\frac{d}{dx}$ est zéro. Aussi on peut déterminer z' par la méthode précédente et on aura :

$$z' = A_0 + A_1 x + \cdots A_m x^m$$

En intégrant terme à terme on aura :

$$z = (B_0 + B_1 x + \cdots B_m x^m)\, x \qquad + \text{cons.}$$

La constante arbitraire ne joue pas de rôle car l'intégrale $y = e^{x} . z$ que nous cherchons est une intégrale particulière et non l'intégrale générale de l'équation différentielle ; cette intégrale générale sera donnée par une combinaison de l'intégrale particulière trouvée et des solutions de l'équation sans second membre.

5/ α est une racine multiple d'ordre λ de $\varphi(k)$

On peut alors écrire :

$$\varphi(k) = (k-\alpha)^{\lambda}\,\varphi_1(k)$$

L'expression : $\varphi(k+\alpha)$ s'annulera pour $k=0$ qui sera alors une racine d'ordre λ c'est-à-dire que dans le développement de $\varphi(k+\alpha)$, le terme constant et toutes les puissances de k jusqu'à la puissance $\lambda-1$, ne figurent pas.

Par suite l'opérateur $\left\{\varphi\left(\frac{d}{dx}+\alpha\right)\right\}z$ sera une équation différentielle de $n-\lambda$ ordre pour $z^{(\lambda)}$

Alors :
$$z^{(\lambda)} = A_0 + A_1 x + \dots A_m x^m$$

et en intégrant λ fois on aura :

$$z = \left[B_0 + B_1 x + \dots B_m x^m\right]x^{\lambda}$$

Les coefficients $B_0 \dots B_m$ sont calculés par la méthode des coefficients indéterminés.

__Exemple__

$$y'' - y = x^2 e^x$$

$\varphi(k) = k^2 - 1$; $k_{1,2} = \pm 1$; or $\alpha = 1$

on voit bien que $\varphi(\alpha) = 0$; α est une racine simple

On écrira alors :

$$z = \left[c_0 + c_1 x + c_2 x^2\right]x$$

et
$$y = e^x\left[c_0 + c_1 x + c_2 x^2\right]x$$

On peut calculer c_0, c_1 et c_2.

26/12/1934

Nous avons vu comment on peut trouver une solution particulière de l'équation différentielle

$$y^{(n)} + y^{(n-1)} + \cdots + y = x^m e^{\alpha x}$$

ou plus généralement

$$y^{(n)} + y^{(n-1)} + \cdots + y = P_m e^{\alpha x}$$

où P_m est un polynôme en x de degré m.

Avec cette solution particulière et les solutions de l'équation sans second membre on peut composer la solution générale de l'équation.

<u>Cas où l'exposant de e est imaginaire ou complexe</u>

On a alors les formes en $\sin \alpha x$ et $\cos \alpha x$ car:

$$\cos \alpha x = \frac{1}{2}\left[e^{\alpha i x} + e^{-\alpha i x}\right]$$

$$\sin \alpha x = \frac{1}{2i}\left[e^{\alpha i x} - e^{-\alpha i x}\right]$$

Comme nous l'avons vu la solution sera un polynôme de degré m multiplié soit par $\cos \alpha x$ ou $\sin \alpha x$.

Ainsi en généralisi:

$$\left\{\varphi\left(\frac{d}{dx}\right)\right\} y = P_m \cos \alpha x + Q_m \sin \alpha x$$

et si l'on suppose que: $i\alpha \neq K_1, K_2 \ldots$

ou $\varphi(\pm i\alpha) \neq 0$

(car les racines sont conjuguées puisque $\varphi(K)$ a ses coefficients réels) on aura la forme:

$$y = p_m \cos \alpha x + q_m \sin \alpha x$$

Dans le cas où $\varphi(\pm \alpha i) = 0$ et si $i\alpha$ est une racine de multiplicité λ il faut remplacer p_m et q_m par $x^\lambda p_m$ et $x^\lambda q_m$ et alors

$$y = x^\lambda p_m \cos \alpha x + x^\lambda q_m \sin \alpha x$$

Puisque l'on connaît le degré de p et de q on peut déterminer ces deux polynômes par la méthode des coefficients indéterminés comme on l'a vu ci-dessus.

Exemple

Considérons le mouvement vibratoire à amortissement. L'équation du mouvement est de la forme :

$$y'' + \lambda y' + \beta^2 y = K \sin \alpha x$$

où la variable x représente le temps.

Le cas simple du mouvement oscillatoire était

$$y'' + \beta^2 y = 0$$

L'adjonction de la force $K \sin \alpha x$ qui est une force périodique de période $\frac{2\pi}{\alpha}$ indique que le mouvement est amorti sous l'action de cette force.

Le terme $\lambda y'$ indique que les amortissements ont lieu sur la vitesse : dans le sens de la vitesse si λ est positif et en sens inverse si λ est négatif. On appelle λ le coefficient d'amortissement.

Nous supposerons λ positif, c'est-à-dire que les amortissements agissent dans le sens de la vitesse. Le cas inverse n'existe pas dans la nature.

L'équation complète

$$y'' + \lambda y' + \beta^2 y = K \sin \alpha x \qquad (1)$$

est dite à vibration forcée.

L'équation sans second membre : ~~est dite~~

$$y'' + \lambda y' + \beta^2 y = 0 \qquad (2)$$

est dite à vibration libre.

Solution :

L'équation caractéristique de l'équation (1) est :

$$\varphi(K) = K^2 + \lambda K + \beta^2 = 0$$

Si l'on suppose ~~K~~ λ positif et différent de 0 nous aurons que :

$$\varphi(\pm \alpha i) \neq 0$$

car dans ce cas une ~~racine~~ expression imaginaire pure ne peut être racine de l'équation puisque le terme λK existe toujours.

Dans notre exemple $m=0$

Alors la solution particulière sera de la forme:

$$y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$$

Il faut déterminer A et B qui ne sont pas des constantes arbitraires d'intégrations.

Nous avons:

$$y' = -A\alpha\sin\alpha x + B\alpha\cos\alpha x$$

$$y'' = -A\alpha^2\cos\alpha x - B\alpha^2\sin\alpha x$$

$$y'' + \lambda y' + \beta^2 y = \cos\alpha x\left[\beta^2 A - A\alpha^2 + B\alpha\lambda\right] + \sin\alpha x\left[\beta^2 B - B\alpha^2 - A\alpha\lambda\right]$$

$$= K\sin\alpha x$$

En identifiant les coefficients des 2 égalités, ensuite en égalons à 0 le coefficient de $\cos\alpha x$ et à K celui de $\sin\alpha x$ nous aurons:

$$A(\beta^2-\alpha^2) + B\alpha\lambda = 0$$

$$-A\alpha\lambda + B[\beta^2-\alpha^2] = K$$

De ces deux équations on tire immédiatement:

$$A = \frac{-K\alpha\lambda}{(\beta^2-\alpha^2)^2+\alpha^2\lambda^2} \qquad B = \frac{K(\beta^2-\alpha^2)}{(\beta^2-\alpha^2)^2+\alpha^2\lambda^2}$$

Nous avons ainsi l'intégrale particulière

$$y = \frac{-K\alpha\lambda\cos\alpha x + K(\beta^2-\alpha^2)\sin\alpha x}{(\beta^2-\alpha^2)^2+\alpha^2\lambda^2}$$

Pour avoir la solution générale il faut résoudre

$$y'' + \lambda y' + \beta^2 y = 0$$

L'équation caractéristique est:

$$K^2 + \lambda K + \beta^2 = 0$$

$$K = -\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \beta^2}$$

a/ $\frac{\lambda^2}{4} - \beta^2 > 0$ ou $\lambda^2 > 4\beta^2$: les amortissements sont assez grands.

Dans ce cas nous avons deux racines réelles K_1 et K_2

qui sont toutes deux négatives, car leur produit est positif: β^2 et leur somme négative: $-\lambda$.

L'intégrale générale sera de la forme:

$$y = C_1 e^{K_1 x} + C_2 e^{K_2 x} + A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$$

A et B étant les valeurs trouvées ci-dessus.

Quand $x \to \infty$ on voit que $e^{K_1 x}$ et $e^{K_2 x}$ tendent vers 0 car K_1 et K_2 sont négatifs. On voit alors que

$$y \to A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$$

c'est une fonction périodique de période $\frac{2\pi}{\alpha}$ ne dépendant que de la force d'amortissement $K\sin\alpha x$

b/ $\frac{\lambda^2}{4} - \beta^2 < 0$ ou $\lambda^2 < 4\beta^2$; les amortissements sont faibles.

Nous avons dans ce cas que les racines sont imaginaires:

$$K_1 = -\frac{\lambda}{2} + i\sqrt{\beta^2 - \frac{\lambda^2}{4}}$$

$$K_2 = -\frac{\lambda}{2} - i\sqrt{\beta^2 - \frac{\lambda^2}{4}}$$

Dans ce cas la solution sera de la forme:

$$y = e^{-\frac{\lambda x}{2}} \left[C_1 \cos\sqrt{\beta^2 - \frac{\lambda^2}{4}} + C_2 \sin\sqrt{\beta^2 - \frac{\lambda^2}{4}} \right] + A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$$

Quand $x \to \infty$ $e^{-\frac{\lambda x}{2}} \to 0$ et alors:

$$y \to A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$$

qui est le même mouvement que dans le cas a.

Ainsi: un pendule d'amortissement (coefficient d'amortissement λ) sous l'action d'une force agissante périodique $K\sin\alpha x$ prend après un certain temps un mouvement périodique ne dépendant que de la force agissante et du coefficient λ.

c/ $\frac{\lambda^2}{4} = \beta^2$; ce cas est identique à a/. Seulement la solution y se présente sous la forme:

$$y = [C_1 + C_2 x] e^{-\frac{\lambda}{2}x} + A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$$

Il est facile de voir que pour $x \to \infty$ $y \to A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$ car:

$$C_1 e^{-\frac{\lambda}{2}x} \text{ tend vers } 0$$

De même $C_2 \, x e^{-\frac{\lambda}{2}x}$ tend aussi vers 0 comme on peut le constater par la règle de l'Hospital:

$$x e^{-\frac{\lambda}{2}x} = \frac{x}{e^{\frac{\lambda}{2}x}} \; ;$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\frac{\lambda}{2}x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}(x)}{\frac{d}{dx} e^{\frac{\lambda}{2}x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{\lambda}{2} e^{\frac{\lambda}{2}x}} = 0$$

<u>Cas spécial: $\lambda = 0$</u>

a/ $\alpha \neq \beta$

Ce cas se réduit au cas b/ car on aura toujours des racines imaginaires pour l'équation caractéristique. Il suffit donc de faire dans l'équation générale du cas b/ $\lambda = 0$

On a alors:

$$y = C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x + \frac{K}{\beta^2 - \alpha^2} \sin\alpha x$$

[on a remplacé A et B par leur valeur; $A = 0$ $B = \frac{K}{\beta^2-\alpha^2}$]

On voit que même si $x \to \infty$ on a toujours un mouvement périodique qui peut se mettre sous la forme:

$$y = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin(\beta x + \varepsilon) + \frac{K}{\beta^2 - \alpha^2} \sin\alpha x$$

[On peut écrire:

$$y = C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x + M \qquad [M = \tfrac{K}{\beta^2-\alpha^2} \sin\alpha x]$$

multiplions et divisons par $\sqrt{C_1^2+C_2^2}$; on a:

$$y = \sqrt{C_1^2+C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} \cos\beta x + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} \cos\beta x \right) + M$$

Posons: $\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} = \sin\varepsilon$; $\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} = \cos\varepsilon$

(on peut faire ceci puisque C_1 et C_2 $< \sqrt{C_1^2+C_2^2}$)

Il est évident que:

$$\frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon} = tg\,\varepsilon = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\varepsilon = \operatorname{arctg}\frac{c_1}{c_2}$$

alors $y = M + \sqrt{c_1^2+c_2^2}\,(\sin\varepsilon\cos\beta x + \cos\varepsilon\sin\beta x) = \sqrt{c_1^2+c_2^2}\,\sin(\beta x+\varepsilon) + M$

c.q.f.d.

$\sqrt{c_1^2+c_2^2}$ est appelée l'oscillation libre ou amplitude du mouvement. ε en est la phase.

2°/ $\alpha = \beta$

Dans ce cas on ne peut appliquer le cas b/ car:

$$B = \frac{K}{\beta^2-\alpha^2}$$

devient infini pour $\beta = \alpha$.
Il faut alors étudier à part l'équation.

Si $\lambda = 0$ et $\alpha = \beta$ notre équation devient:

$$y'' + \beta^2 y = K\sin\beta x$$

C'est l'équation d'un mouvement oscillatoire sans amortissement.

L'équation caractéristique est:

$$\varphi(K) = K^2 + \beta^2 = 0 \qquad K = \pm\beta i$$

Nous sommes dans le cas où l'exposant de e dans l'équation linéaire générale est imaginaire $[\alpha=\beta;\ \alpha i=\beta i]$ et de plus: $\varphi(\alpha i) = 0$
Nous avons vu que la solution était de la forme:

$$y = [p_m\cos\alpha x + q_m\sin\alpha x]\,x$$

Or ici $m = 0$; Donc:

$$y = x[A\cos\beta x + B\sin\beta x] \qquad \alpha=\beta$$

Déterminons A et B. Calculons y'' et identifions.

appliquons la règle de Leibnitz.

$$y'' = 0 + 2\beta[-A\sin\beta x + B\cos\beta x] - \beta^2[A\cos\beta x + B\sin\beta x]x$$

$$y'' + \beta^2 y = 2\beta(-A\sin\beta x + B\cos\beta x] = K\sin\beta x$$

En identifiant on a immédiatement:

$B = 0 \qquad A = -\frac{K}{2\beta}$

Ainsi on voit que:

$$y = -\frac{Kx}{2\beta}\cos\beta x$$

L'intégrale générale sera de la forme:

$$y = C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x - \frac{x}{2\beta}\cos\beta x$$

C_1 et C_2 étant des constantes d'intégration à déterminer par les conditions initiales.

[$C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x$ constitue la solution générale de l'équation $y'' + \beta^2 y = 0$]

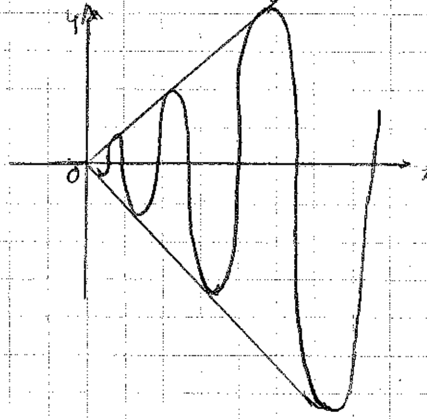
Cette solution que nous venons de trouver est tout à fait particulière car elle ne ressemble pas aux cas: $[\lambda < 0]$ $\lambda > 0$ et $\lambda = 0$ avec $\alpha \neq \beta$

Car ici pour x augmentant y augmente et quand x tend vers l'infini y croît au delà de toute limite

On dit qu'il y a dans ce cas:

résonance ou

synchronisme.



Systèmes d'équations linéaires simultanées

Nous avons vu que l'on pouvait réduire une équation linéaire, ou non en un système d'équations simultanées de premier ordre.

Montrons maintenant que le problème inverse est aussi possible: on peut réduire un système d'équations simultanées à une seule équation différentielle d'ordre supérieur.

Bornons nous dans le cas de deux équations du 1er ordre:

$$y' = f(x, y, z) \qquad (1)$$

$$z' = g(x, y, z) \qquad (2)$$

Dérivons (1) par rapport à x :

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' \qquad (3)$$

On a entre (1) et (3) deux équations en z et z'. On peut tirer de ces deux équations les valeurs de z et z' : ~~et ce~~

$$z = \varphi(x, y, y', y'')$$

$$z' = \chi(x, y, y', y'')$$

En portant ces valeurs de z et z' dans (2) nous aurons :

$$\chi(x, y, y', y'') = g[x, y, ~~y~~, \varphi(x, y, y', y'')]$$

qui est bien une équation différentielle en y seulement et du 2e ordre

Il faut remarquer que si chaque équation du système est linéaire l'équation différentielle résultante du système est aussi linéaire.
En effet dans le cas de 2 équations par exemple nous aurons :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = c_1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = c_2 \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = c_3$$

et alors :

$$y'' = c_1 + c_2 y' + c_3 z'$$

On a immédiatement une forme linéaire pour z'.
D'autre part l'équation

$$y' = f(x, y, z)$$

nous donnera aussi une forme linéaire pour z. On aura donc pour le résultat une forme linéaire.

Remarque : $c_1, c_2, c_3 \ldots$ sont ou des constantes ou des fonctions de x seulement.

Exemple

Soient les deux équations que nous supposerons à coefficients constants :

$$y' + a_1 y + b_1 z = 0 \qquad (1)$$

$$z' + a_2 y + b_2 z = 0 \qquad (2)$$

Dérivons (1) ; il vient :

$$y'' + a_1 y' + b_1 z' = 0$$

$$z' = -\frac{y''+a_1 y'}{b_1}$$

(1) nous donne directement :

$$z = -\frac{y'+a_1 y}{b_1}$$

En portant z et z' dans (2) nous aurons :

$$-\frac{y''+a_1 y'}{b_1} + a_2 y - b_2 \frac{y'+a_1 y}{b_1} = 0$$

ou $\quad y'' + a_1 y' + b_2 y' + b_2 a_1 y - a_2 b_1 y = 0$

qui est bien une équation linéaire à coefficients constants.

En général cette méthode de résoudre l'équation n'est pas très pratique. Voici une méthode plus simple pour les équations linéaires.

Soient par exemple deux équations du second ordre et linéaires :

$$y'' + a_1 y' + b_1 z' + c_1 y + d_1 z = 0 \qquad (1)$$

$$z'' + a_2 y' + b_2 z' + c_2 y + d_2 z = 0 \qquad (2)$$

Si on applique la méthode générale il faut : dériver deux fois (1) ; ~~éliminer~~ déterminer de ces trois équations (1), dérivée 1re fois, dérivée 2e fois et l'équation 2, z', z'', z''' et éliminer ces valeurs en dérivant (2) une fois et en portant ~~les~~ dans l'équation ainsi trouvée les valeurs de z', z'' et z'''. On aura alors une équation du 4e ordre linéaire en y. C'est assez long.

Voici une autre méthode :

Posons $\quad y = Ae^{kx}$

$$z = Be^{kx}$$

Déterminons A, B et K

Remplaçons après les avoir calculés y'', z'', y', z' et z et y dans les deux équations données. Nous aurons :

$$e^{Kx}\left[A(K^2+a_1K+c_1)+B(b_1K+d_1)\right]=0$$
$$e^{Kx}\left[A(a_2K+c_2)+B(K^2+b_2K+d_2)\right]=0$$

soit après avoir divisé par e^{Kx}

$$\left.\begin{aligned} A(K^2+a_1K+c_1)+B(b_1K+d_1)&=0\\ A(a_2K+c_2)+B(K^2+b_2K+d_2)&=0\end{aligned}\right\}\ (\alpha)$$

C'est un système de 2 équations homogènes pour A et B. Pour qu'il y ait des solutions différentes de 0 il faut :

$$\begin{vmatrix} K^2+a_1K+c_1 & b_1K+d_1 \\ a_2K+c_2 & K^2+b_2K+d_2 \end{vmatrix} = 0$$

ou $(K^2+a_1K+c_1)(K^2+b_2K+d_2)-(a_2K+c_2)(b_1K+d_1)=0$

C'est une équation ordinaire du 4e degré. Supposons qu'elle ait ses 4 racines distinctes et réelles :

$$K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4$$

Pour chacune de ces valeurs nous aurons une valeur du rapport $\frac{B}{A}$ fourni par l'une des deux équations (α)

(Puisque les équations sont homogènes et le déterminant ci-dessus nul, les 2 valeurs du rapport $\frac{B}{A}$ fournies par chacune des équations (α) sont identiques)

Alors :

$$y=c_1e^{K_1x}+c_2e^{K_2x}+c_3e^{K_3x}+c_4e^{K_4x}$$

où $c_1, c_2\ldots$ sont des constantes d'intégration arbitraires.

D'autre part nous savons que :

$$\frac{z}{y}=\frac{B}{A}\quad;\quad z=y\cdot\frac{B}{A}$$

D'où :

$$z=c_1\left[\frac{B}{A}\right]_1e^{K_1x}+c_2\left[\frac{B}{A}\right]_2e^{K_2x}+c_3\left[\frac{B}{A}\right]_3e^{K_3x}+c_4\left[\frac{B}{A}\right]_4e^{K_4x}$$

$\left[\frac{B}{A}\right]_1,\ \left[\frac{B}{A}\right]_2,\ \left[\frac{B}{A}\right]_3,\ \left[\frac{B}{A}\right]_4$

étant les valeurs du rapport $\frac{B}{A}$ pour chaque K.

31/12/1934

Nous avons indiqué jusqu'ici les solutions des équations linéaires et des équations linéaires simultanées. Nous avons vu que l'on pouvait donner la solution avec des combinaisons de fonctions élémentaires.

Mais il y a des équations différentielles dont la solution n'est pas en général une combinaison de fonctions élémentaires.

Nous avons montré aussi qu'une équation différentielle a toujours une solution.

Il faut donc trouver la solution. Nous emploierons les méthodes suivantes:

A_ Méthode du développement en série

Nous opérerons sur une équation du second ordre. Le problème se traite exactement de la même façon pour une équation d'ordre quelconque.

Soit donc:

$$y'' = f(x, y, y')$$

Supposons que l'on donne les conditions initiales:

$$x = x_0 \qquad y(x_0) = y_0 = a_0 \; ; \qquad y'(x_0) = y'_0 = a_1$$

Nous supposerons que la fonction admet un développement en série de Taylor autour du point $x = x_0$.

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2} y''(x_0)\,(x - x_0)^2 + \dots$$

Si l'on trouve les coefficients de $(x - x_0)$ dans cette équation on obtient la solution cherchée car une fonction n'a qu'un seul développement.

Calculons ces coefficients.

Les conditions initiales nous donnent déjà:

$$y(x_0) = y_0 = a_0$$

$$y'(x_0) = y'_0 = a_1$$

Quand à y''_0 on l'a directement de l'équation différentielle:

$$y''_0 = f(x_0, y_0, y'_0)$$

De même pour calculer y'''_0 nous aurons en

dérivant $y''=f(x,y,y')$:

$$y'''=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial y'}y''=f_1(x,y,y',y'')$$

Par suite :

$$y_0'''=f_1(x_0,y_0,y_0',y_0'')$$

En continuant on peut calculer les dérivées et on a ainsi :

$$a_0=y_0\ ,\ a_1=y_0'\ ,\ a_2=\frac{1}{2}y_0''\ ,\ a_3=\frac{1}{6}y_0'''\ \ldots$$

Toute ces suppositions ne sont exactes que dans le cas où la série en question est convergente.
En général la série est convergente pour certaines valeurs de x. Quand la série n'est pas convergente il faut avoir recours à d'autres méthodes

Exemple

$y''=xy$. p/ $x_0=0$ $y(0)=a_0$ $y'(0)=a_1$

Écrivons le développement de y autour du point $x_0=0$

On a :

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$$

Nous connaissons a_0 et a_1 ; a_2 est donné par :

$$a_2=\frac{1}{2}y_0''=\frac{1}{2}y_0x_0=0$$

D'autre part :

$$y'''=xy'+y$$

$$y_0'''=x_0y_0'+y_0=y_0=a_0$$

D'où : $a_3=\dfrac{a_0}{6}$

De la même manière on peut calculer tous les coefficients $a_4\ldots$

Mais il faut savoir si la série est convergente. Aussi il faut trouver le coefficient général a_r, ce qui est assez compliqué à faire par ce moyen.

Employons une méthode plus facile :

les coefficients indéterminés.

Ecrivons :

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_\nu x^\nu + \cdots$$

En faisant $y'' = xy$ on aura :

$$2a_2 + x\,3.2.a_3 + 4.3 a_4 x^2 + \cdots \nu(\nu-1) a_\nu x^{\nu-2} + \cdots$$
$$= a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \cdots a_\nu x^{\nu+1} + \cdots$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de x [ce que l'on peut faire étant donné que le développement est déterminé univoquement] nous aurons :

$$a_2 = 0 \qquad ;$$
$$3.2.a_3 = a_0 \qquad ; a_3 = \frac{a_0}{3.2.}$$
$$4.3.a_4 = a_1 \qquad a_4 = \frac{a_1}{4.3}$$
$$5.4.a_5 = a_2 \qquad a_5 = a_2 = 0$$

- - - - - - -

$$\nu(\nu-1) a_\nu = a_{\nu-3}$$

On voit facilement que :

$$a_2 = a_5 = a_8 = a_{11} = a_{14} = \cdots = 0$$

$$a_3 = \frac{a_0}{2.3}$$
$$a_6 = \frac{a_0}{2.3.\ 5.6} = a_0 \frac{1.4}{2.3.(4)\,5.6} = a_0 \frac{1.4}{6!}$$
$$a_9 = \frac{a_0}{2.3.\ 5.6.8 9} = a_0 \frac{1.4.7}{2.3.\ (4)\,5 6\,(7) 8 9} = a_0 \frac{1.4.7}{9!}$$

De même :

$$a_4 = \frac{a_1}{4.3}\ ; \quad a_7 = \frac{a_1}{4.3\ \ 6.7}\ ; \quad a_{10} = \frac{a_1}{4.3.6.7.\ 9.10} = a_1 \frac{2.5.8}{10!}$$

D'une manière générale :

$$a_{3n+2} = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$
$$a_{3n} = a_0 \frac{1.4.7 \cdots (3n-2)}{(3n)!}\ ; \quad n = 1, 2, 3 \cdots$$
$$a_{3n+1} = a_1 \frac{2.5.8 \cdots (3n-1)}{(3n+1)!}\ ; \quad n = 1, 2, 3$$

Nous avons donc la solution:

$$y = a_0\left[1 + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{2.3.56}x^6 + \cdots \frac{1.4.\ldots(3n-2)}{(3n)!}x^{3n} + \cdots\right]$$

$$+ a_1\left[X + \frac{X^4}{3.4} + \frac{1}{3.4.67}x^7 + \cdots \frac{2.5.8\ldots(3n-2)}{(3n+1)!}X^{3n+1} + \cdots\right]$$

2 | 1 | 1935

Nous avons donc trouvé comme solution de l'équation

$$y'' = xy$$

la fonction

$$y = a_0 S_0 + a_1 S_1$$

où S_0 et S_1 sont deux séries convergentes en x et a_0 et a_1 étaient donnés par les conditions initiales.

Remarque

La solution exprimée sous cette forme est aussi la solution générale car au lieu de a_0 et a_1 qui sont les conditions initiales on aurait pu poser c_0 et c_1, deux constantes arbitraires d'intégration:

$$y = c_0 S_0 + c_1 S_1$$

Ainsi l'intégrale générale est donc bien une combinaison linéaire des deux séries S_0 et S_1 définies par:

$$S_0 = 1 + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^6}{2.3.56} + \cdots$$

$$S_1 = x + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^7}{3.4.67}$$

Montrons que les séries S_0 et S_1 sont convergentes.

Rappelons nous que nous avions trouvé pour les coefficients de S_0 et S_1 la relation:

$$\nu(\nu-1)a_\nu = a_{\nu-3} \qquad \text{ou}$$

$$a_\nu = \frac{a_{\nu-3}}{\nu(\nu-1)}$$

Examinons la convergence de S_0.

Le terme général de S_0 est :

$$a_\nu x^\nu$$

Le rapport de deux termes consécutifs sera en remarquant que les exposants de x vont de trois en trois :

$$\left|\frac{a_\nu x^\nu}{a_{\nu-3}\, x^{\nu-3}}\right|$$

(le terme précédent à $a_\nu x^\nu$ est $a_{\nu-3}\, x^{\nu-3}$)

Mais comme :

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu-3}} = \frac{1}{\nu(\nu-1)}$$

on a alors :

$$\left|\frac{a_\nu x^\nu}{a_{\nu-3}\, x^{\nu-3}}\right| = \left|\frac{x^3}{\nu(\nu-1)}\right|$$

Quand $\nu \to \infty$ ce rapport tend vers 0 quelque soit la valeur de x. Ainsi le second critère de Cauchy est rempli et la série est convergente pour toutes les valeurs de x.

Ce raisonnement s'applique exactement aussi à S_1.

Les séries S_0 et S_1 sont dites des *fonctions entières* de x

Les fonctions entières sont définies par un polynome en x ou par une série infinie convergente pour toutes les valeurs de x.

Remarque

Cette équation différentielle nous a conduit à définir des fonctions nouvelles S_0 et S_1 que nous avons appelées fonctions entières. Les fonctions (définitions, ressemblent) ressemblent aux celles du $\sin x$ ou $\cos x$ que l'on définit parfois par les séries

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Fonctions de Bessel

Ces fonctions sont définies par la solution de certaines équations différentielles, solution donnée sous forme de séries convergentes pour toutes les valeurs de x.
Les sin et cos, S_0 et S, que nous avons trouvés précédemment sont des cas particuliers de ces fonctions de Bessel qui sont définies par l'équation :

$$y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

ν est un paramètre. On l'appelle l'ordre de la fonction de Bessel

Soit une fonction y définie par :

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\rho+k} = x^\rho (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\dots)$$

Montrons que c'est la solution de l'équation différentielle ci-dessus pourvu que ρ ait certaines valeurs particulières.

Pour avoir la relation qui lie les coefficients $a_0, a_1, \dots$ calculons y'', y' et introduisons les dans l'équation différentielle. Nous devons avoir pour chaque coefficient de x^n une valeur nul afin que le résultat soit identique à 0.

Le terme général dans y est : $a_k x^{\rho+k}$

Ce terme dérivé deux fois devient :

$$(\rho+k)(\rho+k-1) a_k x^{\rho+k-2}$$

Ainsi dans y'' le coefficient de $x^{\rho+k-2}$ est $(\rho+k)(\rho+k-1)a_k$

Cherchons le coefficient de $x^{\rho+k-2}$ dans le terme $\frac{y'}{x}$.

$a_k x^{\rho+k}$ dérivé une fois devient

$$(\rho+k) a_k x^{\rho+k-1}$$

Ce terme divisé par x $\left[\text{on a } \frac{y'}{x}\right]$ devient :

$$(\rho+k) a_k x^{\rho+k-2}$$

Ainsi le coefficient de $x^{\rho+k-2}$ dans $\frac{y'}{x}$ est $(\rho+k)a_k$

Il reste le terme

$$\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y = y - \frac{\nu^2 y}{x^2}$$

Dans y le coefficient de x^{p+k-2} est

$$a_{k-2}$$

car si le terme général de y est

$$a_k x^{p+k}$$

on a évidemment que pour $k = k-2$ ce terme devient

$$a_{k-2} x^{p+k-2}$$

Dans $\frac{\nu^2 y}{x^2}$ le coefficient de x^{p+k-2} est

$$\nu^2 a_k$$

car le terme général de y est : $a_k x^{p+k}$

et alors celui de $\frac{y}{x^2}$ est : $a_k x^{p+k-2}$

et celui de $\frac{\nu^2 y}{x^2}$: $\nu^2 a_k x^{p+k-2}$

Donc le coefficient de x^{p+k-2} dans $\frac{\nu^2 y}{x^2}$ est :

$$\nu^2 a_k$$

La somme des coefficients de x^{p+k-2} dans

y'', $\frac{y'}{x}$ et $\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y$ sera :

$$(p+k)(p+k-1)a_k + (p+k)a_k + a_{k-2} - \nu^2 a_k = 0$$

Soit :

$$a_k\left[(p+k)^2 - \nu^2\right] + a_{k-2} = 0$$

Telle est la relation qui donne a_k a_{k-2} étant donné.

Cette relation est en vigueur pour tous les k positifs ou négatifs. Mais rappelons nous que nous avons posé

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{p+k}$$

c'est-à-dire que K est nul ou positif. Il faut donc que nous trouvions un moyen pour que dans la relation

$$a_k[(\rho+k)^2-\nu^2]+a_{k-2}=0$$

les a_{k-2} s'annulent pour $k=0$. Il suffit pour que ceci ait lieu que:

$$(\rho+k)^2-\nu^2$$

s'annule pour $k=0$; car dans ce cas si l'on fait $k=0$ on aura bien:

$$0+a_{k-2}=0 \quad \text{ou} \quad a_{k-2}=0$$

Ainsi si nous faisons $k=0$ dans $(\rho+k)^2-\nu^2$ nous aurons:

$$\rho^2-\nu^2=0$$

$$\rho^2=\nu^2$$

$$\rho=\pm\nu$$

Traitons le cas $\rho=+\nu$; nous verrons plus tard le cas $\rho=-\nu$.

La relation entre a_k et a_{k-2} devient:

$$a_k\left[(\nu+k)^2-\nu^2\right]+a_{k-2}=0$$

$$\text{ou} \quad a_k\,k(2\nu+k)+a_{k-2}=0 \quad ; \quad a_k=-\frac{a_{k-2}}{k(2\nu+k)}$$

Supposons donné a_0 ; $[a_0\neq 0]$

On a immédiatement

$$a_2=-\frac{a_0}{2(2\nu+2)}=-\frac{a_0}{2^2.1.(\nu+1)}$$

$$a_4=\frac{-a_2}{4(2\nu+4)}=-\frac{a_2}{2.2.2.(\nu+2)}=\frac{+a_0}{2.2.2.2^2.1(\nu+1)(\nu+2)}$$

$$a_4=\frac{a_0}{2^4.1.2.(\nu+1)(\nu+2)}$$

$$a_6=-\frac{a_4}{6(2\nu+6)}=-\frac{a_4}{3.2.2.(\nu+3)}=\frac{-a_0}{2^6.1.2.3.(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}$$

- - - - -

D'une manière générale on peut dire que

si l'on pose $\lambda = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$$a_{2\lambda} = a_0 (-1)^\lambda 2^{-2\lambda} \frac{1}{\lambda! (\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\ldots(\nu+\lambda)}$$

Si nous prenons d'autre part

$a_1 = 0$ nous aurons que:

$a_1 = a_3 = a_5 = a_7 \ldots = 0$ et alors:

$$a_{2\lambda+1} = 0$$

Notre série est donc bien déterminée. Montrons que c'est une série entière. En effet le terme général de la série est:

$$a_k x^{\nu+k} \quad ;$$

le terme précédent est: $a_{k-2} x^{\nu+k-2}$

[D'après les considérations précédentes nous avons dit que $a_{2\lambda+1} = 0$ et par suite il n'y a pas de terme $a_{k-1} x^{\nu+k-1}$]

Le rapport des deux termes consécutifs est:

$$\left| \frac{a_k x^{\nu+k}}{a_{k-2} x^{\nu+k-2}} \right| = \left| \frac{a_k}{a_{k-2}} x^2 \right|$$

Mais puisque $\left| \frac{a_k}{a_{k-2}} \right| = \frac{1}{k(2\nu+k)}$ ce rapport égale:

$$\frac{|x^2|}{|k(2\nu+k)|}$$

Or cette fraction tend rapidement vers 0 pour les valeurs de k assez grandes ce qui nous permet de dire d'après le second critère de Cauchy que la série est convergente pour toutes les valeurs de x

La fonction y est donc bien déterminée. On dit que c'est une fonction de Bessel d'ordre ν et de première espèce

3/1/1935

L'équation de Bessel ~~que l'on~~ peut aussi s'écrire sous la forme:

$$x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = 0$$

Nous avons trouvé comme solution particulière de l'équation

$$y = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{2\lambda} x^{\nu+2\lambda}$$

où $$a_{2\lambda} = \frac{(-1)^\lambda a_0 2^{-2\lambda}}{1.2.3\ldots\lambda.(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+\lambda)}$$

Comme la solution générale doit être composée de deux solutions particulières, il nous faut trouver une autre solution.

A cet effet on aurait pu poser que $a_0 = a_2 = a_4 \ldots = 0$ et alors on aurait les coefficients:

$$a_1 , a_3 \ldots\ldots a_{2\lambda+1}$$

et on aurait une autre solution. Mais il y a un moyen plus facile.

ν ne paraît dans l'équation différentielle qu'en ν^2. Il s'ensuit que l'on peut faire dans l'équation

$$y = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{2\lambda} x^{\nu+2\lambda}$$

$\nu \to -\nu$ et alors on aura une solution distincte

car $x^{\nu+2\lambda}$ et $x^{-\nu+2\lambda}$ sont bien distincts ou indépendants car ils ne sont liés par aucune relation linéaire.

Seulement en supposant que ν soit entier, dans l'expression de $a_{2\lambda}$ on aura sûrement un facteur pour qui s'annulera quand $\nu \to -\nu$ et alors $a_{2\lambda}$ seraient infini. Toutefois

si l'on prend a_0 convenablement de manière que les facteurs $(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+\lambda)$ ne commencent que pour $\lambda > -\nu$ on peut avoir une solution mais cette solution diffère de l'autre que par une constante ce que l'on peut vérifier aisément. Aussi on ne peut employer cette méthode quand ν est un entier, pour avoir une autre solution. Nous verrons plus tard comment on y parvient.

Si ν est une fraction, la substitution de $-\nu$ à ν donne une solution bien déterminée indépendante de la première. Ces 2 solutions peuvent s'indiquer par:

$$J_\nu \quad \text{et} \quad J_{-\nu}$$

et alors :

$$y = C_1 J_\nu + C_2 J_{-\nu}$$

C_1 et C_2 étant les constantes d'intégration

On a cherché à donner à a_0 des valeurs convenables. A cet effet on est parti des considérations de factorielle

Euler a cherché à définir la factorielle d'une fraction. Dans ces considérations on est parti de la forme :

$$\int_0^\infty t^\lambda e^{-t} dt$$

Cette intégrale définie est uniformement convergente car

$$\frac{t^\lambda}{e^t}$$

tend vers 0 avec t en augmentant et ceci pour n'importe quelle valeur de λ.

Soit donc :

$$\Pi(\lambda) = \int_0^\infty t^\lambda e^{-t} dt$$

En intégrant par parties $[u = t^\lambda, dv = e^{-t}dt]$ on a :

$$\Pi(\lambda) = \left| -t^\lambda e^{-t} \right|_0^\infty + \lambda \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-t} dt$$

Mais $\left| -t^\lambda e^{-t} \right|_0^\infty = 0$

et $\int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-t} dt = \Pi(\lambda-1)$

Donc on a la forme :

$$\Pi(\lambda) = \lambda \, \Pi(\lambda-1)$$

qui permet de calculer $\Pi(\lambda)$ de proche en proche.

Si nous supposons que λ est un entier on pourra écrire :

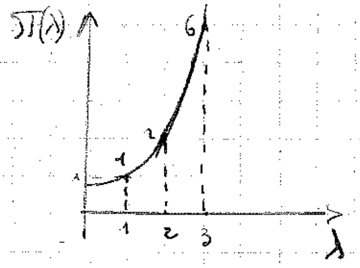
$$\Pi(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)\dots 2.1\,\Pi(0)$$

Mais $\Pi(0) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$

Donc:

$$\pi(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots 2.1 = \lambda! \quad (\lambda \text{ factorielle})$$

Nous avons dit que $\Pi(\lambda) = \int_0^\infty t^\lambda e^{-t} dt$ était uniformément convergente quelque soit λ. Il s'ensuit que $\Pi(\lambda)$ est une fonction continue. Il s'ensuit que les points



1, 2, 6, 24...

qui sont les valeurs de $\Pi(\lambda)$

pour λ entier sont reliés par une courbe continue représentant les variations de la fonction $\Pi(\lambda)$.

On voit donc que $\Pi(\lambda)$ est parfaitement défini même pour λ non entier.

La fonction $\Pi(\lambda)$ a été dénommée par Gauss. Euler l'a appelé:

fonction Γ

Seulement la fonction Γ se distingue de $\Pi(\lambda)$ par ce que:

$$\Gamma(\lambda+1) = \Pi(\lambda) = \lambda!$$

ou

$$\Gamma(\lambda) = (\lambda-1)!$$

Dans l'expression de $a_{2\lambda}$ nous avions au dénominateur:

$$(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\dots\dots(\nu+\lambda)$$

En supposant λ entier ν un nombre fractionnaire positif ou négatif nous pouvons écrire:

$$\Pi(\nu+\lambda) = (\nu+\lambda)(\nu+\lambda-1)(\nu+\lambda-2)\dots(\nu+2)(\nu+1)\,\Pi(\nu)$$

car la fonction Π est bien définie même si $\nu+\lambda$ est une expression contenant une fraction.

Nous avions :

$$a_{2\lambda} = \frac{a_0 (-1)^\lambda 2^{-2\lambda}}{~~\Pi(\lambda)\,\Pi(\nu+\lambda)~~ \; 1.2.3\ldots\lambda\,(\nu+1)(\nu+2)+\cdots(\nu+\lambda)}$$

Mais $1.2.3\ldots\lambda = \lambda! = \Pi(\lambda)$

et en multipliant et divisant $a_{2\lambda}$ par $\Pi(\nu)$ nous aurons :

$$a_{2\lambda} = \frac{a_0 (-1)^\lambda 2^{-2\lambda}\,\Pi(\nu)}{\Pi(\lambda)\left[(\nu+\lambda)(\nu+\lambda-1)\cdots(\nu+2)(\nu+1)\,\Pi(\nu)\right]}$$

mais $(\nu+\lambda)(\nu+\lambda-1)\cdots(\nu+2)(\nu+1)\,\Pi(\nu) = \Pi(\nu+\lambda)$

On a donc :

$$a_{2\lambda} = \frac{a_0 (-1)^\lambda 2^{-2\lambda}\,\Pi(\nu)}{\Pi(\lambda)\,\Pi(\nu+\lambda)}$$

Prenons pour a_0 la valeur :

$$a_0 = \frac{1}{\Pi(\nu)\,2^\nu}$$

Dans ce cas :

$$a_{2\lambda} = (-1)^\lambda \frac{2^{-\nu-2\lambda}}{\Pi(\lambda)\,\Pi(\nu+\lambda)} = (-1)^\lambda \frac{1}{2^{\nu+2\lambda}\,\Pi(\lambda)\,\Pi(\nu+\lambda)}$$

et alors on aura :

$$J_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \frac{1}{\Pi(\lambda)\,\Pi(\nu+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda}$$

C'est la définition de la fonction de Bessel de 1ère espèce et d'ordre ν

A l'aide de cette forme la fonction de Bessel est définie pour les ν fractionnaires.

Nous avons vu que $J_{-\nu}$ était aussi défini dans ce cas et alors on a :

$$y = C_1 J_\nu + C_2 J_{-\nu}$$

Nous avons trouvé :

$$J_\nu(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\Pi(\lambda)\,\Pi(\nu+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda}$$

Essayons de développer ceci.

Le premier terme sera :

$$\frac{x^\nu}{2^\nu\,\Pi(\nu)}$$; il correspond à $\lambda = 0$ [on se rappelle que : $\Pi(0) = 1$]

Le second correspond à $\lambda = 1$; ce sera :

$$-\frac{x^{\nu+2}}{\Pi(1)\,\Pi(\nu+1)\;2^{\nu+2}} = -\frac{x^{\nu+2}}{2^\nu\;2.(2\nu+2)\,\Pi(\nu)}$$ car :

par définition :

$$\Pi(\nu+1) = (\nu+1)\,\Pi(\nu) \qquad \text{et} \qquad \Pi(1) = 1$$

De même si $\lambda = 2$ on a :

$$+\frac{x^{\nu+4}}{\Pi(2)\,\Pi(\nu+2)\,2^{\nu+4}} = +\frac{x^{\nu+4}}{2^{\nu+4}.\;2\,\Pi(1)\,(\nu+2)(\nu+1)\,\Pi(\nu)} = \frac{x^{\nu+4}}{\Pi(\nu)\,2^\nu\,2.4\,(2\nu+2)(2\nu+4)}$$

De même on trouve facilement pour un troisième terme :

$$-\frac{x^{\nu+6}}{\Pi(\nu)\,2^\nu\,.2.4.6.\;(2\nu+2)(2\nu+4)(2\nu+6)}$$

Donc :

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu\,\Pi(\nu)}\left[1 - \frac{x^2}{2(2\nu+2)} + \frac{x^4}{2.4.(2\nu+2)(2\nu+4)} - \frac{x^6}{2.4.6.(2\nu+2)(2\nu+4)(2\nu+6)} + \cdots\right]$$

<u>Cas particuliers</u>

1° Supposons $\nu = 0$; alors :

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2.2} + \frac{x^4}{(2.\,4)^2} - \frac{x^6}{(2.4.6)^2} + \cdots$$

2°/ $v = 1$

$$J_1(x) = \frac{x}{2}\left[1 - \frac{x^2}{2.4} + \frac{x^4}{2.4^2.6} - \frac{x^6}{2.4^2.6^2.8} + \cdots\right]$$

3°/ $v = 1/2$

$$J_{1/2}(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}\,\Pi(1/2)}\left[1 - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2.4.3.5} + \cdots\right]$$

Mais si nous multiplions et divisons par x nous aurons:

$$J_{1/2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}\,\Pi(1/2)}\left[x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \cdots \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right]$$

Or:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

est le developpement de $\sin x$. Donc:

$$J_{1/2}(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{2x}\,\Pi(1/2)}$$

4°/ $v = -1/2$

$$J_{-1/2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}\,\Pi(-1/2)}\left[1 - \frac{x^2}{2.} + \frac{x^4}{2.4.3} - \cdots\right]$$

Mais:

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \cdots = \cos x$$

Donc: $$J_{-1/2}(x) = \frac{\cos x}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\,\Pi(-1/2)} = \frac{\cos x}{\sqrt{\frac{x}{2}}\,\Pi(-1/2)}$$

En combinant le 3° et le 4° on a la solution générale:

$$y(x) = A\,\frac{\sin x}{\sqrt{2x}\,\Pi(1/2)} + B\,\frac{\cos x}{\sqrt{\frac{x}{2}}\,\Pi(-1/2)}$$

qui est un système fondamental de l'équation de Bessel pour

$$v^2 = \frac{1}{4}$$

Recherche d'une autre solution dans le cas de ν entier

Montrons que dans le cas où ν est un entier que

$$J_\nu \quad \text{et} \quad J_{-\nu}$$

ne sont pas indépendants.

Soit $\nu = -n$ n étant un entier

On pourra écrire:

$$J_{-n}(x) = \sum_{\lambda=n}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\lambda}}{\Pi(\lambda)\,\Pi(-n+\lambda)}$$

Nous commençons la somme à $\lambda = n$ car le cas où $\lambda < n$ nous donnerait un facteur nul au dénominateur.

Remplaçons λ par: $\lambda = \mu + n$

[on peut le faire car λ est l'indice de sommation]

On a:

$$J_{-n}(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu+n}}{\Pi(\mu+n)\,\Pi(\mu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\mu}$$

car: pour $\lambda = n$, $\mu = 0$ et

$$\Pi(\lambda) = \Pi(\mu+n) \quad \text{et} \quad \Pi(-n+\lambda) = \Pi(\mu)$$

En mettant $(-1)^n$ hors de l'opération de sommation on a:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{\Pi(\mu)\,\Pi(\mu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\mu}$$

Mais:
$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\mu}}{\Pi(\mu)\,\Pi(\mu+n)} = J_n(x)$$

Donc:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

ce qui montre que J_n et J_{-n} ou J_ν et $J_{-\nu}$ ne sont pas indépendants

Cherchons maintenant une autre solution.

Nous savons que:

$$a_\nu J_\nu + b_\nu J_{-\nu}$$

est une solution de l'équation différentielle si ν est fractionnaire.

Posons que:

$$a_\nu = \frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi} \quad \text{et} \quad b_\nu = -\frac{1}{\sin\nu\pi}$$

Soit $Y_\nu(x)$ la fonction définie par:

$$Y_\nu = \frac{\cos\nu\pi\, J_\nu - J_{-\nu}}{\sin\nu\pi}$$

Quand ν est fractionnaire cette expression a une valeur bien déterminée.

Si ν est entier puisque:

$$J_\nu = (-1)^\nu J_{-\nu} \quad \text{ou}$$

$$(-1)^\nu J_\nu = J_{-\nu}$$

$$\text{et} \quad \cos\nu\pi = (-1)^\nu \quad \text{et} \quad \sin\nu\pi = 0$$

On aura pour $Y_\nu(x)$ la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Donc $Y_\nu(x)$ est déterminée pour tous les ν fractionnaires et indéterminée pour tous les ν entiers.

Soit le cas où $\nu = n$ un entier quelconque, nous aurons que:

$$Y_n(x) = \lim_{\nu=n} \frac{\cos\nu\pi\, J_\nu - J_{-\nu}}{\sin\nu\pi}$$

Appliquons la règle de l'Hospital. Nous aurons:

$$Y_n(x) = \lim_{\nu=n} \frac{-\pi\sin\nu\pi\, J_\nu + \cos\nu\pi \frac{\partial J_\nu}{\partial\nu} - \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}}{\pi\cos\nu\pi}$$

$$Y_n(x) = \left[\cos n\pi \left(\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}\right)_{\nu=n} - \left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right)_{\nu=n}\right] \frac{1}{\pi\cos n\pi}$$

où :

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} (-1)^n$$

car $\cos n\pi = (-1)^n$ et : $\frac{1}{\cos n\pi} = (-1)^n$

D'autre part, $\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n}$ peut s'écrire sous la forme

$$-\left(\frac{\partial J_{\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=-n}$$

car le changement de ν en $-\nu$ entraîne le changement du signe provenant de $\partial\nu$.

Donc :

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} + \frac{(-1)^n}{\pi}\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu=-n}$$

Calculons : $\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}$

On se rappelle que : $J_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\Pi(\lambda)\,\Pi(\nu+\lambda)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda}$

$$\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\Pi(\lambda)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda} \cdot \frac{\partial}{\partial \nu}\left[\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{[\Pi(\nu+\lambda)]}\right]$$

Mais : $\frac{\partial}{\partial \nu}\left[\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Pi(\nu+\lambda)}\right] = \frac{1}{\Pi(\nu+\lambda)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \operatorname{Ln}\frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{\Pi'(\nu+\lambda)}{\Pi(\nu+\lambda)^2}$

Donc $\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}$ devient

$$\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda}}{\Pi(\lambda)\,\Pi(\nu+\lambda)}\left[\operatorname{Ln}\frac{x}{2} - \frac{\Pi'(\nu+\lambda)}{\Pi(\nu+\lambda)}\right]$$

En posant $\frac{\Pi'(\nu+\lambda)}{\Pi(\nu+\lambda)} = \psi(\nu+\lambda)$ fonction que nous calculerons plus tard nous aurons :

$$\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} = \operatorname{Ln}\frac{x}{2}\, J_\nu(x) - \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\Pi(\lambda)\,\Pi(\nu+\lambda)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda}\psi(\nu+\lambda)$$

et alors :

$$\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} = \operatorname{Ln}\frac{x}{2}\, J_n(x) - \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\Pi(\lambda)\,\Pi(n+\lambda)}\psi(n+\lambda)$$

$$\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu=-n} = \operatorname{Ln}\frac{x}{2}\, J_{-n}(x) - \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\lambda}}{\Pi(\lambda)\,\Pi(-n+\lambda)}\psi(-n+\lambda)$$

Formons :

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial J}{\partial r}\right)_{r=n} + \frac{(-1)^n}{\pi}\left(\frac{\partial J_r}{\partial r}\right)_{r=-n}$$

et remarquons que :

$$J_n = (-1)^n J_{-n}$$

On aura alors le résultat suivant :

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Ln}\frac{x}{2}\, J_n(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\Pi(\lambda)\,\Pi(n+\lambda)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}\Psi(n+\lambda)$$

$$- \frac{(-1)^n}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^\lambda}{\Pi(\lambda)\,\Pi(-n+\lambda)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\lambda}\Psi(-n+\lambda)$$

C'est la définition de la fonction de Bessel de 2e espèce d'ordre n

Les signes de Σ indiquent des séries dont nous étudierons la convergence plus tard. On peut dire tout de même que les séries sont convergentes étant donné que l'on a $\Pi(\lambda)$ au dénominateur et que d'ailleurs dans les Ψ, rentrent comme nous le verrons ci-dessous les $\Pi(\lambda)$ au dénominateur.

Afin de simplifier on peut écrire pour le 3e terme dans $Y_n(x)$ que :

$$\frac{(-1)^n}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^\lambda}{\Pi(\lambda)\,\Pi(-n+\lambda)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\lambda}\Psi(-n+\lambda) = \frac{1}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda+n}}{\Pi(\lambda)\,\Pi(-n+\lambda)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\lambda}\Psi(-n+\lambda)$$

Décomposons la somme en deux parties ; remarquons que nous pourrons écrire :

$$(-1)^n = (-1)^{-n}$$

et alors on a donc facilement pour le 3e terme :

$$S = \frac{1}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda-n}}{\Pi(\lambda)\,\Pi(-n+\lambda)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\lambda}\Psi(-n+\lambda)$$

Décomposons maintenant la somme en deux :

de $\lambda = 0$ à $\lambda = n-1$ et de $\lambda = n$ à $\lambda = \infty$

On a alors:

$$S = \frac{1}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{n-1}\frac{(-1)^{\lambda-n}}{\Pi(\lambda)\Pi(-n+\lambda)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\lambda}\Psi(-n+\lambda) + \underbrace{\frac{1}{\pi}\sum_{\lambda=n}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda-n}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\lambda}}{\Pi(\lambda)\Pi(-n+\lambda)}\Psi(-n+\lambda)}_{S_1}$$

Mais S_1 peut être modifié de ~~la cette~~ cette manière:

Posons: $\lambda = n+\mu$

Alors pour $\lambda = n$ $\mu = 0$

et $\lambda - n = \mu$ et $2\lambda - n = 2n + 2\mu - n = 2\mu + n$

D'où:

$$S_1 = \frac{1}{\pi}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\mu}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\mu}}{\Pi(n+\mu)\,\Pi(\mu)}\Psi(\mu)$$

Cette somme est tout à fait la même si l'on pose maintenant au lieu de μ, λ et alors:

$$S_1 = \frac{1}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\Pi(\lambda)\,\Pi(n+\lambda)}\Psi(\lambda)$$

Alors:

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}\,Ln\frac{x}{2}\,J_n(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\Pi(\lambda)\Pi(n+\lambda)}\left[\Psi(n+\lambda)+\Psi(\lambda)\right]$$

$$- \frac{1}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\frac{(-1)^{\lambda-n}}{\Pi(\lambda)\Pi(-n+\lambda)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\lambda}\Psi(-n+\lambda)$$

<u>Cas particulier</u>

Supposons $n=0$; le 3^e terme de $Y_n(x)$ n'a plus sa raison d'être et alors:

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\,Ln\frac{x}{2}\,J_0(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}\Psi(\lambda)}{\Pi(\lambda)\Pi(\lambda)}$$

$$= \frac{2}{\pi}\,Ln\frac{x}{2}\,J_0(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda}}{\left[\Pi(\lambda)\right]^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}\Psi(\lambda)$$

Nous pouvons développer la somme en nous rappelant que

$$\Pi(\lambda) = \lambda! \qquad (\lambda \text{ entier})$$

Pour $\lambda=0$ on aura :

$$\Pi(0) = 1 \quad \text{et alors le 1}^{\text{er}} \text{ terme sera } \psi(0)$$

Pour $\lambda = 1$,

$$\Pi(1) = 1 \quad \text{et alors on a :}$$

$$-\frac{\psi(1)}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

Pour $\lambda = 2$:

$$\frac{\psi(2)}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4$$

D'où :

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Ln}\frac{x}{2}\, J_0(x) - \frac{2}{\pi}\left[\psi(0) - \frac{\psi(1)}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{\psi(2)}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \dots + \dots\right]$$

On voit que si $x=0$, Y_0 est indéterminé car :

$$\operatorname{Ln} 0 = -\infty$$

Donc pour les n entiers la fonction de Bessel de 2e espèce ne possède pas généralement un développement en série de Taylor autour du point $x=0$

Etudions la fonction ψ

ψ était défini par :

$$\psi(v) = \frac{\Pi'(v)}{\Pi(v)}$$

Mais $\dfrac{\Pi'(v)}{\Pi(v)} = \dfrac{d}{dv}\left[\operatorname{Ln} \Pi(v)\right]$

Donc :

$$\psi(v) = \frac{d}{dv}\left[\operatorname{Ln} \Pi(v)\right] \quad \text{= dérivée logarithmique}$$

D'autre part on sait que :

$$\Pi(v) = v\, \Pi(v-1)$$

qui est l'équation fonctionnelle caractérisant et définissant Π

En prenant les logarithmes de part et d'autre on a:

$$\operatorname{Ln} \Pi(v) = \ln v + \operatorname{Ln} \Pi(v-1)$$

Dérivons par rapport à v:

$$\frac{\Pi'(v)}{\Pi(v)} = \psi(v) = \frac{1}{v} + \psi(v-1)$$

C'est l'équation fonctionnelle pour ψ.

Pour chaque entier quelconque n on a:

$$\psi(n) = \frac{1}{n} + \psi(n-1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \psi(n-2) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \psi(n-3)$$

$$\psi(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \psi(0)$$

Connaissant $\psi(0)$ on a immédiatement $\psi(n)$.

Calculons $\psi(0)$.

A cet effet partons de la définition de $\Pi(v)$.

On sait que:

$$\Pi(v) = \int_0^\infty e^{-t} t^v \, dt$$

Cette série étant uniformément convergente. On peut dériver sous le signe de l'intégrale et écrire:

$$\Pi'(v) = \int_0^\infty e^{-t} t^v \ln t \, dt$$

[on dérive par rapport à v]

alors:

$$\psi(0) = \frac{\Pi'(0)}{\Pi(0)} = \frac{\Pi'(0)}{1} = \Pi'(0) = \int_0^\infty e^{-t} \ln t \, dt$$

Cette intégrale ne peut être fournie par une intégrale générale. On doit la calculer par approximation. Pour rendre ceci plus facile on emploie le moyen suivant:

Décomposons l'intervalle d'intégration en deux:

$$\psi(0) = \int_0^1 e^{-t} \ln t \, dt + \int_1^\infty e^{-t} \ln t \, dt$$

Intégrons par parties en prenant dans la 1ère intégrale, pour intégrale de : $e^{-t}dt$: $1-e^{-t}$

On aura :

$$\psi(0) = (1-e^{-t})\ln t\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{(1-e^{-t})\,dt}{t} \Big| - e^{-t}\ln t\Big|_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}dt}{t}$$

Mais : $(1-e^{-t})\ln t\Big|_0^1 = 0$

[quand t est un infiniment petit on peut prendre au lieu de e^{-t} le 2e terme de son développement : $1-t+\dots$

et alors on a la forme : $t\ln t$ qui tend vers 0 pour $t \to 0$]

et $e^{-t}\ln t\Big|_1^{\infty} = 0$

D'où : $$\psi(0) = -\int_0^1 \frac{(1-e^{-t})}{t}dt + \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}dt}{t}$$

$\psi(0)$ est une constante universelle ; c'est la constante d'Euler ; on la désigne par

$$C = -\psi(0)$$

car on trouve que $\psi(0)$ est négatif.

Avec les calculs on obtient :

$$C = 0,577\,215\,665 \dots$$

[on connaît C à 100 décimales près]

En définitive il vient alors pour $y_0(x)$:

$$y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x)\,\text{Ln}\frac{x}{2} - \frac{2}{\pi}\left[-C - \frac{1-C}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1+\frac{1}{2}-C}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-C}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots\right.$$

$$= \frac{2}{\pi} J_0(x)\,\text{Ln}\frac{x}{2} + \frac{2C}{\pi}\left[1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x^4}{(2.4)^2} - \frac{x^6}{(2.4.6)^2} \dots\right]$$

$$+ \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1+\frac{1}{2}}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 - \dots\right]$$

Mais nous avons trouvé:

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{x^4}{(2.4)^2} - \frac{x^6}{(2.4.6)^2} \dots$$

On a donc:

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \ln\frac{x}{2} J_0(x) + \frac{2C}{\pi} J_0(x) + \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1+1/2}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1+1/2+1/3}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 \dots\right]$$

$$y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x)\left[\ln\frac{x}{2} + C\right] + \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1+1/2}{(2!)^2}\left(\frac{x}{4}\right)^4 + \frac{1+1/2+1/3}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 \dots\right]$$

14 |1| 1935

Soit une équation quelconque d'ordre supérieur au premier, du 2e ordre par exemple;

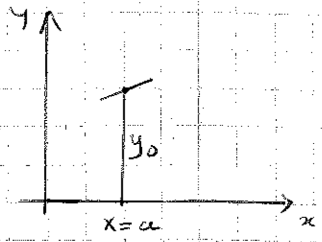
$$y'' = f(x, y, y')$$

On sait que l'intégrale générale dépend de deux constantes arbitraires:

$$y = F(x, C_1, C_2)$$

Etant donné cette solution on peut trouver avec certaines conditions additionnelles, (les conditions initiales jusqu'à présent) une solution particulière.

Par exemple on donne:



$x = a \qquad y(a) = y_0$

$y'(a) = y'_0$

C'est-à-dire que l'on donne dans le plan xy un point et une direction passant par ce point. Nous savons que la condition de Lipschitz étant remplie, l'on a une solution et une seule passant par le point et tangente à la direction donnée.

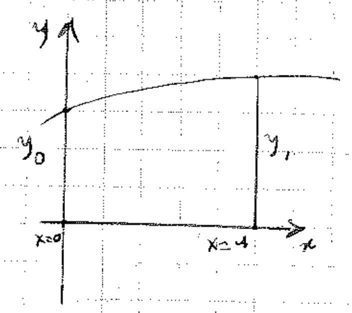
Si l'on donne le point on a alors une simple infinité de courbes passant par le point.

Au lieu de donner les conditions initiales ci-dessus on aurait pu donner d'autres conditions. Par exemple:

$x = a \quad y(a) = y_0 \qquad$ et $\qquad x = b \quad y(b) = y_1$

En d'autres termes il s'agit de trouver la courbe passant par deux points donnés.

Traitons l'exemple suivant.



$$y'' = x$$

Solution générale:

$$y = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

Soient les conditions:

$$y(0) = y_0 \qquad y(1) = y_1$$

Déterminons c_1 et c_2 d'après ces conditions.

Si l'on fait $x=0$ dans l'équation on a:

$$y(0) = y_0 = c_2$$

Si l'on fait $x=1$ on a:

$$y(1) = y_1 = \frac{1}{6} + c_1 + c_2 = \frac{1}{6} + c_1 + y_0$$

$$c_1 = y_1 - \frac{1}{6} - y_0$$

Alors on aura d'une manière bien déterminée:

$$y = \frac{x^3}{6} + \left(y_1 - y_0 - \frac{1}{6}\right) x + y_0$$

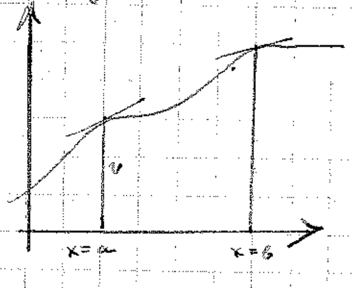
Les conditions autres que les conditions initiales (que nous avons vues jusqu'à présent) sont dites:
conditions au bord de l'intervalle ab.

Au lieu de donner $y(a) = y_0$ et $y(b) = y_1$

on peut ~~d'aut~~ donner d'autres conditions au bord, par exemple:

W $x=a$ $y'(a) = y'_0$ et $x=b$ $y'(b) = y'_1$

c'est-à-dire deux directions.



Soit par exemple l'équation du 4e ordre:

$$y^{IV} = f(x, y, y', y'', y''')$$

La solution générale a

4 constantes arbitraires ; ainsi :

$$y = F(x, C_1, C_2, C_3, C_4)$$

On peut chercher à déterminer $C_1, C_2 \ldots$ par les conditions. Par exemple si l'on donne :

$$y(a), \quad y'(a) \quad , y(b) \quad , y'(b)$$

On ne peut toutefois affirmer que l'on a toujours une solution comme on le fait et d'une manière générale pour les équations dont on a donné des conditions initiales.
Il y a même des cas où l'équation est insoluble.

Exemple et Discussion

Nous traiterons le cas d'une équation linéaire du second ordre.

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = b$$

a_1, a_2 et b sont ou des constantes ou des fonctions de x seulement.

Nous allons traiter le cas pour lequel les conditions au bord seront :

$$y(a) = A \qquad y(b) = B$$

Soient $y_1(x)$ et une solution particulière de l'équation complète (elle peut comprendre aussi une seule constante arbitraire) et $y_2(x)$ une solution de l'équation homogène.
La solution générale sera de la forme :

$$y(x) = y_1(x) + C y_2(x)$$

(il y a seulement la constante C, mais nous avons dit que $y_1(x)$ avait aussi une constante arbitraire)

Nous pouvons écrire :

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = b$$

$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2' = 0$$

puisque $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont les solutions indiquées plus haut.

Nous avons dit :

$$y(x) = y_1(x) + C y_2(x)$$

Faisons $x = a$:

$$y(a) = A = y_1(a) + C y_2(a) \quad (1)$$

Faisons $x = b$

$$y(b) = B = y_1(b) + C y_2(b) \quad (2)$$

Il faut déterminer maintenant C. A cet effet il faut déterminer $y_1(x)$ et $y_2(x)$

Supposons le cas que :

$$y_1(a) = A$$

Alors les deux conditions :

$$\begin{cases} y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = b \\ y_1(a) = A \end{cases}$$

Donnent une infinité simple de solutions de la forme $y_1(x)$ qui satisfont à la condition $y_1(a) = A$

La supposition $y_1(a) = A$ entraîne alors le fait que dans (1)

$$C y_2(a) = 0$$

ou $y_2(a)$

Alors les équations

$$\begin{cases} y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0 \\ y_2[a] = 0 \end{cases}$$

Donnent une infinité simple de solutions de la forme $y_2(x)$ qui satisfont à la condition

$$y_2(a) = 0$$

Si nous prenons une des solutions de la forme $y_1(x)$ et une autre de la forme $y_2(x)$, bien déterminées, nous

aurons :

$$y(x) = y_1(x) + C\,y_2(x)$$

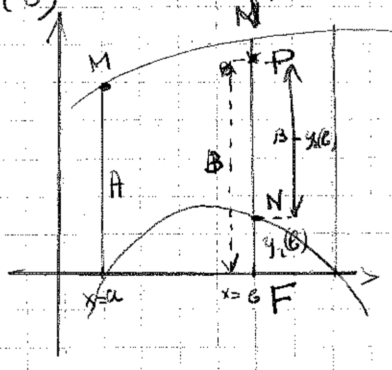
et alors en faisant $x = b$ on a :

$$y(b) = B = y_1(b) + C\,y_2(b)$$

$y_1(x)$ et $y_2(x)$ étant bien déterminés maintenant il en sera de même de $y_1(b)$ et $y_2(b)$ et alors on aura immédiatement.

$$C = \frac{B - y_1(b)}{y_2(b)}$$

Alors : $y(x) = y_1(x) + \dfrac{B - y_1(b)}{y_2(b)}\,y_2(x)$



Difficulté :

Il se peut que $y_2(b) = 0$

Etudions la question

Soit M le point $x = a$ $y_1(a) = A$

Nous avons $y_2(a) = 0$

Prenons le point $x = b$; nous avons les points N' et N :

N' $y_1(b)$

N $y_2(b)$

Soit le point P donné par : $x = b$ et $y(b) = B$

Nous savons que $y(b) = B = y_1(b) + C\,y_2(b)$

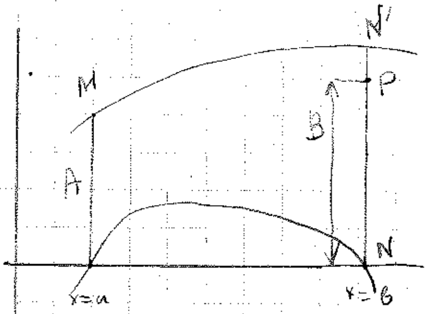
Si $y_1(b)$ est différent de 0 il est facile d'ajouter à $y_1(b)$ une certaine valeur positive ou négative et avoir aussitôt B. Ainsi dans notre exemple :

$$FB = FN' - PN' = FN + NP$$

$$= y_1(b) + [B - y_2 b] = y_1(b) + [B - y_1(b)]$$

Ici la quantité ajoutée à $y_1(b)$ est $B - y_1(b)$ qui est ici négative

Si $y_1(b) = 0$



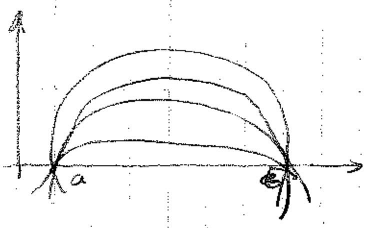
On voit que toujours :

$B = y_1(b)$

ce qui n'a pas nécessairement lieu étant donné que l'on ne donne pas nécessairement ceci.

Remarque

Nous pourrions nous dire que puisque $y_2(b) = 0$ et que nous avons pris arbitrairement $y_2(x)$ nous pourrions changer la valeur de $y_2(x)$ de manière à ce que $y_2(b)$ soit différent de 0.
Il faut dire que les solutions en $y_2(x)$ ne diffèrent que d'une constante. Mais aux extrêmes on aura toujours 0 pour $x = a$ et $x = b$.
aussi l'ensemble s'annulle pour $x = a$ et $x = b$



Donc on n'a une solution que si $y_2(b) \neq 0$

On peut mettre ce résultat sous une forme plus suggestive.

Soit le problème :

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = b$$

$$y(a) = A \qquad y(b) = B$$

Ce problème est dit non homogène.
a ce problème nous pourrons rattacher le problème homogène :

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

$$y(a) = 0 \qquad y(b) = 0$$

Si le problème homogène a une solution c'est-à-dire que nous aurons le cas

$$y_2(b) = 0$$

le problème non homogène n'a pas de solution comme nous l'avons vu.

Si l'équation non homogène a une solution, alors

$$y_1(b) \neq 0$$

on n'a pas une solution pour l'équation homogène.

Donc : si l'équation homogène a une solution, l'équation non homogène n'a pas de solution ; si l'équation non homogène a une solution, l'équation homogène n'a pas de solutions ; en résumé les 2 équations homogènes et non homogènes n'ont jamais ~~une~~ des solutions en même temps.

Ce résultat est dit : alternative

C'est un fait général pour toutes les équations linéaires d'ordre quelconque.

Reprenons l'exemple

$$y'' = x \qquad \text{avec } y(0) = y_1 \quad \text{et } y(1) = y_2$$

Le problème non homogène ci-dessus avait une solution. Montrons que le problème homogène n'a pas de solution

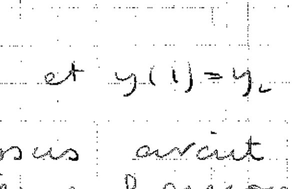
<u>Remarque</u>

Quand on parle d'une solution d'une équation homogène on veut dire que l'on a une solution différente de 0 car la solution $y = 0$ est solution de toutes les équations homogènes.

Le ~~solu~~ problème homogène est :

$$y'' = 0 \qquad \text{et} \qquad y(0) = y(1) = 0$$

Or $y'' = 0$ est l'équation d'une droite



et alors on a que cette droite passe par O et par A sur Ox
c'est donc la droite Ox et
par suite $y = 0$; donc on n'a pas de solution différente de 0, c'est-à-dire que l'on n'a pas de solution.

En général $y'' = f(x)$ avec $y(a) = y_1$ et $y(b) = y_2$

a toujours une solution car le problème homogène : $y'' = 0$ avec $y(a) = 0$ $y(b) = 0$ n'a pas de solution.

2^{me} Semestre

6 - 2 - 1935

Fonctions de la variable complexe ou Fonctions analytiques

Rappel des propriétés principales des nombres complexes

On se rappelle qu'un nombre complexe était l'ensemble de deux nombres ordinaires, positifs ou négatifs, pris dans un ordre déterminé

Soient (x, y) et (x', y') deux paires de nombres réels. Pour pouvoir opérer sur ces deux paires il faut par exemple définir leur somme

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

Un exemple est fourni par le vecteur plan. Deux ~~pa~~ nombres suffisent pour le déterminer. D'autre part on définit la somme géométrique de deux vecteurs d'après la règle bien connue du parallélogramme.

L'emploi du symbole

$$x + iy$$

pour un nombre complexe avec $i^2 = -1$ suffit pour définir toutes les opérations sur les nombres complexes. On opère comme si c'était des nombres algébriques.

Ainsi :

$$(x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y')$$

$$(x + iy)(x' + iy') = xx' + xiy' + iyx' + i^2 yy'$$

et en remplaçant i^2 par -1.

$$(x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + yx')$$

De même

$$\sin(x+iy) = x+iy - \frac{(x+iy)^3}{3!} + \frac{(x+iy)^5}{5!} \dots$$

$$\left(\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \dots \right)$$

Le second membre est un nombre complexe car en remplaçant i^2 par -1 et ses puissances aussi on n'aura seulement que i.
(La convergence de la série ci-dessus ne nous intéresse pas pour le moment)

<u>Remarque</u>

Il y a plusieurs systèmes de nombres complexes.
Par exemple si l'on pose:

$$i^2 = 0$$

Ou les quaternions:

$$x + iy + ju + kv$$

x, y, u, v étant des nombres réels, i, j, k étant définis par:

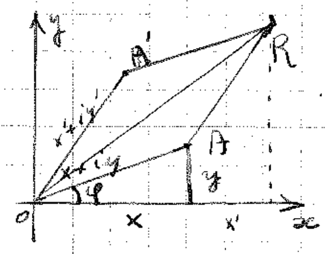
$$i^2 = 1 \quad ; \quad j^2 = 1 \quad ; \quad k^2 = 1$$

$$ij = k \quad ; \quad jk = i \quad ; \quad ki = j$$

Nous ne nous occuperons que des nombres complexes pour lesquels:

$$i^2 = -1$$

<u>Représentation graphique des nombres complexes</u>



On se rappelle que les nombres complexes étaient représentés par chaque point du plan (plan de Gauss)

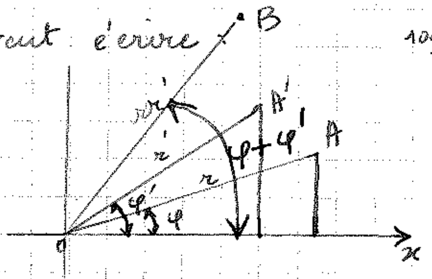
L'axe des x est dit: axe réel et l'axe des y axe imaginaire

Puisque nous avons défini:

$$(x+iy) + (x'+iy') = x+x' + i(y+y')$$

nous voyons que la somme de deux nombres complexes n'est autre qu'une sommation vectorielle

On se rappelle aussi que l'on pouvait écrire



$$x+iy = re^{i\varphi}$$

$$r = |\sqrt{x^2+y^2}| \qquad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Il s'ensuit que:

$$(x+iy)(x'+iy') = re^{i\varphi} \cdot r'e^{i\varphi'} = rr'e^{i(\varphi+\varphi')}$$

On voit que le produit de deux nombres complexes peut être facilement représenté:

$$\widehat{BOx} = \varphi+\varphi'$$

$$OB = rr'$$

Fonctions d'une variable complexe

On peut écrire $z = x+iy$ z étant bien défini

Soit une fonction u telle que:

$$u = p(x,y) + iq(x,y)$$

p et q sont des fonctions de x, y. u est bien un nombre complexe. On pourrait dire que c'est une fonction complexe. Mais on réserve le nom à une fonction définie autrement comme on le verra ci-dessous.

Nous pouvons définir $\frac{du}{dz}$.

En effet:

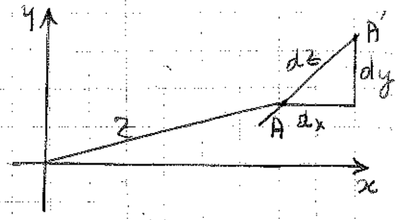
$$\frac{du}{dz} = \frac{dp+i\,dq}{dx+i\,dy} = \frac{\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + i\frac{\partial q}{\partial x}dx + i\frac{\partial q}{\partial y}dy}{dx+i\,dy}$$

En divisant haut et bas par dx; on a:

$$\frac{du}{dz} = \frac{\frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + i\frac{\partial q}{\partial y}\right)}{1 + i\frac{dy}{dx}}$$

On voit que $\frac{du}{dz}$ dépend de $\frac{dy}{dx}$.

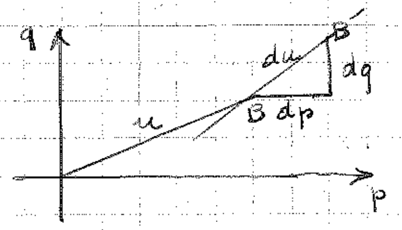
Interprétons ceci géométriquement.



Or $dz = dx + i\,dy$

Le point A' est bien défini
L'accroissement dz est donné par la direction

$$\frac{dy}{dx}$$



De même $du = dp + i\,dq$

Dans le plan p, q on obtient le point B'. Nous cherchons $\frac{du}{dz}$

Puisque dz dépend de $\frac{dy}{dx}$, il en sera de même de $\frac{du}{dz}$

Alors on donne le nom de fonction de la variable complexe ou de fonction analytique à la fonction u telle que:

$$\frac{du}{dz} \text{ soit indépendant de } \frac{dy}{dx}$$

Nous avions trouvé:

$$\frac{du}{dz} = \frac{\frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + i\frac{\partial q}{\partial y}\right)}{1 + i\frac{dy}{dx}}$$

Rappelons nous que pour que la fraction

$$\frac{a + mb}{a' + mb'}$$

soit indépendante de m il suffit que:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

En appliquant ceci à $\frac{du}{dz}$ on a la condition:

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial q}{\partial x}}{1} = \frac{\frac{\partial p}{\partial y} + i\frac{\partial q}{\partial y}}{i}$$

7/2/1935

L'égalité précédente peut s'écrire:

$$i\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} + i\frac{\partial q}{\partial y}$$

Mais on sait que pour que deux nombres complexes

soient égaux, il faut que les deux parties réelles soient égales et les deux parties imaginaires aussi. En appliquant ceci à l'égalité ci-dessus nous trouvons:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x}$$

Ce sont les équations de Cauchy-Riemann qui définissent les propriétés d'une fonction analytique.

Les équations peuvent s'écrire sous une autre forme. Dérivons la 1ère par rapport à x et la seconde par rapport à y. Nous avons:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y}$$

On voit que: $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$ ou $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0$

En dérivant la première équation par rapport à y et la seconde par rapport à x on obtient:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 q}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

On a donc: $\frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$ ou $\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = 0$

Les équations:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = 0$$

sont dites équations de Laplace. Elles dérivent des équations de Cauchy-Riemann

Nous disons donc qu'une fonction u

$$u = p(x,y) + iq(x,y)$$ telle que $p(x,y)$ et $q(x,y)$

satisfont aux équations de Cauchy-Riemann ou de Laplace est une fonction analytique

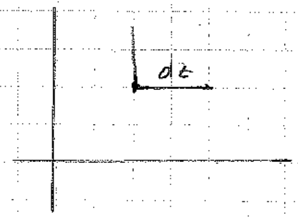
En supposant que u soit une fonction analytique on obtient:

$$\frac{du}{dz} = \frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial q}{\partial x} = -i\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial y}$$

(on obtient ceci en appliquant les équations de Cauchy-Rieman à l'expression de $\frac{du}{dz}$)

On pourrait obtenir directement ces valeurs par d'autres considérations.

Nous disons que: $\frac{du}{dz}$ doit être indépendant de la direction de dz. Alors nous pourons choisir dz comme on veut.
Prenons le parallele à l'axe des x. Dans dz il n'y a plus de partie imaginaire et on a seulement une variation de ~~dx~~ x.

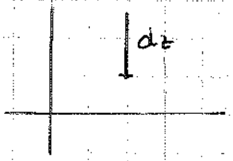


Alors nous pourons prendre la dérivée de u par rapport à x seulement puisque y reste invariable et alors:

$$\frac{du}{dz} = \frac{\frac{\partial p}{\partial x}dx + i\frac{\partial q}{\partial x}dx}{dx} = \frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial q}{\partial x}$$

De même on pourrait prendre dz parallèlement à l'axe des y; dans ce cas

$$dz = i\,dy$$

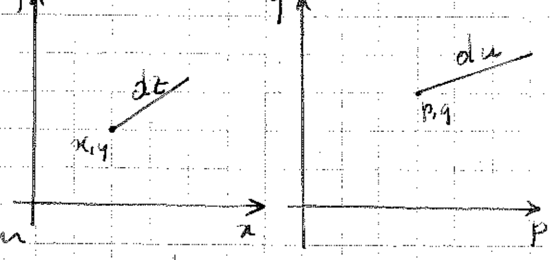


et $dx = 0$; il suffit donc de dériver u seulement par rapport à y; alors:

$$\frac{du}{dz} = \frac{\frac{\partial p}{\partial y}dy + i\frac{\partial q}{\partial y}dy}{i\,dy} = \frac{1}{i}\left[\frac{\partial p}{\partial y} + i\frac{\partial q}{\partial y}\right] = -i\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial y}$$

<u>Représentation géométrique</u>

Soient z et u les plans de x, y et de p, q.



Considérons le point x, y du plan x, y. Soit p, q le point correspont.

Considérons un accroissement dz dans une direction quelconque. u prend alors un accroissement du

Nous avons trouvé que:

$$\frac{du}{dz} = \frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial q}{\partial x} = -i\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial y}$$

On voit que $\frac{du}{dz}$ est un nombre complexe dont

$$\frac{\partial p}{\partial x} \text{ ou } \frac{\partial q}{\partial y}$$

est la partie réelle et

$$\frac{\partial q}{\partial x} \text{ ou } \frac{\partial p}{\partial y}$$

est la partie imaginaire

Mais un nombre imaginaire peut s'écrire sous la forme

$$\lambda e^{i\varphi}$$

Donc:

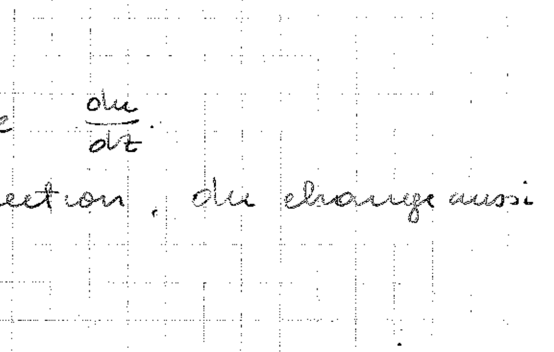
$$\frac{du}{dz} = \lambda e^{i\varphi}$$

$$\lambda = \left|\frac{du}{dz}\right| \quad \text{et} \quad tg\varphi = \frac{\frac{\partial q}{\partial x}}{\frac{\partial p}{\partial x}} = -\frac{\frac{\partial p}{\partial y}}{\frac{\partial q}{\partial y}}$$

$\lambda = \left|\frac{du}{dz}\right|$ indique justement le rapport des longueurs $\frac{du}{dz}$ et dz. Or nous pourrons prendre dz dans n'importe quelle direction

Puisque $\frac{du}{dz}$ ne dépend pas de la direction de dz et ce rapport conservera toujours la même valeur. Il en sera de même de λ et de φ. alors nous pourrons dire que si au voisinage du point x, y considéré dz décrit un cercle, au voisinage de p, q du décrit aussi un cercle tel que

$$\left|\frac{du}{dz}\right| = \lambda$$



L'angle φ est la différence:

$$\varphi = \beta - \alpha$$

puisque φ est l'argument de $\frac{du}{dz}$.

Quand je change dz de direction, du change aussi. Mais on a toujours:

$$-\widehat{M''MX} + \widehat{N''NP} = \varphi$$

$$-\widehat{M''MM'} - \alpha + \widehat{N''NN'} + \beta = \varphi \quad ; \quad \text{comme } \beta - \alpha = \varphi \text{ on a}$$

$$\widehat{M''MM'} = \widehat{N''NN'}$$

Ainsi les deux triangles isocèles:

$M''MM'$ et $N''NN'$

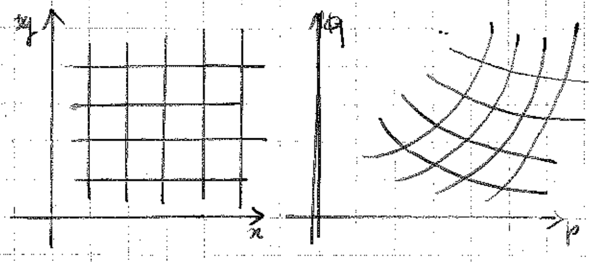
sont semblables.

Nous concluons donc de ceci que: pour passer du plan de z au plan p, q ou de u, au voisinage de deux points correspondants, les longueurs du plan z sont multipliées par une quantité constante dans le plan u et elles sont tournées d'un angle φ. En d'autres termes, au voisinage de deux points correspondants, les figures correspondantes sont semblables.

Ainsi chaque fonction analytique définit une correspondance entre deux plans telle que les figures infiniment petites autour de deux points correspondants sont semblables.

On dit ainsi que ces figures sont conformes. La conformité diffère de la similitude en ce qu'elle s'applique seulement aux infiniments petits. On dit que la correspondance ci-dessus donne une représentation conforme.

Si par exemple nous avons dans le plan des z une deux lignes orthogonales nous aurons aussi dans le plan u deux lignes orthogonales. Seulement la conformité n'implique pas que les lignes du plan des z et celles du plan des u soient de même nature.
Ainsi, si dans le plan des z on a un réseau de droites orthogonales, dans le plan des u on aura une famille de courbes orthogonales mais pas nécessairement des droites.



Particularités des fonctions à variable complexe

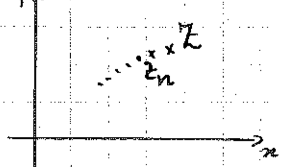
Notion de limite sur les nombres complexes

Soit la suite de nombres complexes:

$z_1, z_2, z_3 \ldots\ldots$

suite infinie. Quand dira-t-on que cette suite a une limite?

Chaque nombre z_i est un point du plan z. On dira qu'il y a une limite pour la suite ci-dessus si à partir d'un n assez grand



La distance entre z_n et un point z fixe tend vers 0.

Soit $|z - z_n| < \varepsilon$

en langage mathématique.

En d'autres termes il faut qu'à chaque ε, quantité aussi petite qu'on veut, il corresponde un nombre n_0 tel que pour $n > n_0$ on ait:

$$|z - z_n| < \varepsilon$$

Supposons:

$$z = x + iy$$

$$z_n = x_n + i y_n$$

$$z - z_n = x - x_n + i(y - y_n) ;$$

alors:

$$|z - z_n| = \left|\sqrt{(x-x_n)^2 + (y-y_n)^2}\right|$$

Nous avons la condition:

$$|z - z_n| \leq \varepsilon$$

$$\left|\sqrt{(x-x_n)^2 + (y-y_n)^2}\right| < \varepsilon \qquad \text{ou}$$

$$(x-x_n)^2 + (y-y_n)^2 < \varepsilon^2$$

Cette condition entraîne:

$$(x - x_n)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

$$(y - y_n)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

ou

$$|x - x_n| < \varepsilon' \qquad \varepsilon' = \varepsilon \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|y - y_n| < \varepsilon'$$

C'est-à-dire que les suites:

$$x_1, x_2, x_3 \ldots x_n \ldots$$

$$y_1, y_2, y_3 \ldots y_n \ldots$$

tendent respectivement vers x et vers y

C'est la condition nécessaire pour que la suite $z_1 \ldots z_n \ldots$ tende vers la limite z.

Montrons que cette condition est suffisante

En effet si l'on suppose que

$$x_n \to x \quad \text{et} \quad y_n \to y$$

on a que:

$$\left| \sqrt{(x-x_n)^2+(y-y_n)^2} \right| \longrightarrow 0$$

ou $\quad |z-z_n| \to 0$

ou $\quad z_n \to z$

Continuité dans les fonctions analytiques

Dans les fonctions à variable réelle la continuité ~~était~~ en un point a défini par le fait que:

si $\quad x \to a$,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Dans le cas d'une fonction de deux variables c'était la même chose. On disait que la fonction $f(x,y)$ était continue au point

$$x=a \quad y=b$$

si:

$$x \to a \qquad y \to b$$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = f(a,b)$$

Les mêmes considérations s'appliquent aux fonctions analytiques.

On dit que la fonction analytique $u(z)$ est continue pour $z=a$ si:

quand $z \to a$, $\lim_{z\to a} u(z) = u(a)$

Approfondissons ceci.

Soit $a = \alpha + \beta i$ et $u = p(x,y) + i\, q(x,y)$

La définition ci-dessus entraîne le fait que

$$\lim_{\substack{x=\alpha\\y=\beta}} p(x,y) = p(\alpha,\beta)$$

$$\lim_{\substack{x=\alpha\\y=\beta}} q(x,y) = q(\alpha,\beta)$$

C'est-à-dire que $p(x,y)$ et $q(x,y)$ doivent être continue.

Or nous ~~aff~~ avons supposé que p et q remplissent certaines conditions:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x} \right)$$

portant sur les dérivées de p et q. Nous avons donc supposé que p et q étaient des fonctions toujours dérivables. Or des fonctions dérivables sont continues. Si ses fonctions sont continues il en sera de même de : u. Nous arrivons donc au fait qu'une fonction analytique est toujours continue.

De plus :

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{du}{dz}$$

étant bien défini d'après les conditions posées quoique: $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ dépende~~nt~~ de la direction $\frac{dy}{dx}$; cela n'empêche pas que $\frac{du}{dz}$ soit bien défini par les seules fon ctions fonctions p et q.

$$\left[\frac{du}{dz} = \frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial q}{\partial x} = -i\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial y} \right]$$

Nous voyons donc qu'une fonction analytique est toujours dérivable.

<u>Propriétés de la dérivée d'une fonction analytique</u>

Toutes les règles de dérivation d'une fonction réelle s'appliquent aux dérivées d'une fonction analytique. Par exemple :

1°) La dérivée d'une somme égale la somme des dérivées de chaque fonction.

Soit la fonction: $u(z) = f(z) + g(z)$

Donnons à z un accroissement dz ; nous aurons :

$$u(z+dz) = f(z+dz) + g(z+dz)$$

alors :

$$u(z+dz) - u(z) = f(z+dz) - f(z) + g(z+dz) - g(z)$$

$$\Delta u = \Delta f + \Delta g$$

accroissement de u — accroissement de f — accroissement de g

D'où en divisant par Δz :

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\Delta f}{\Delta z} + \frac{\Delta g}{\Delta z}$$

En passant à la limite et en remarquant que la limite d'une somme égale la somme des limites on a :

$$\frac{du}{dz} = \frac{df}{dz} + \frac{dg}{dz}$$

Remarque

Cette démonstration nous a montré deux choses :

1°) que $\frac{du}{dz}$ existe car $\frac{df}{dz}$ et $\frac{dg}{dz}$ existent puisque f et g sont des fonctions analytiques

2°) que $\frac{du}{dz}$ égale $\frac{df}{dz} + \frac{dg}{dz}$

4) Dérivée d'un produit :

On montrerait facilement que :

$$\frac{d(f.g)}{dz} = f\frac{dg}{dz} + g\frac{df}{dz}$$

Ce résultat nous prouve l'existence de $\frac{d(fg)}{dz}$ et aussi il nous donne la valeur de $\frac{d(fg)}{dz}$.

Séries infinies à termes complexes

Soit la série infinie

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots$$

dont les termes sont des quantités complexes

Nous disons que cette série est convergente si la somme partielle:

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

tend vers une limite s pour n augmentant indéfiniment.

Mais on peut supposer que:

$$u_1 = p_1 + iq_1$$

La condition que $s_n \to s$ implique que la partie réelle de s_n tende vers une limite ainsi que la partie imaginaire. C'est-à-dire que les séries:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots$$

$$q_1 + q_2 + q_3 + \dots$$

soient convergentes. C'est la condition nécessaire et suffisante.

On peut indiquer une condition pas nécessaire mais suffisante pour que la série:

$$u_1 + u_2 + u_3 \dots$$

soit convergente. C'est:

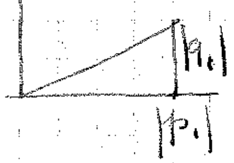
Cette série est convergente si la série formée des valeurs absolues ~~est~~ de $u_1, u_2 \dots$ soit convergente.

En effet bar.

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$$

est convergente. Or on sait que si une série est convergente, les séries dont les termes sont égaux ou inférieurs chacun à chacun aux termes de cette série est convergente.

Or on a évidemment:



$$|p_1| < |u_1| \quad \dots$$

$$|q_1| < |u_1|$$

On a donc que les séries:

$$|p_1| + |p_2| + \dots \quad \text{et}$$

$$|q_1| + |q_2| + \dots$$

sont convergentes. Elles le sont absolument. Or on sait que si la série :

$$\sum_{r=1}^{\infty} |a_r|$$

est convergente, il en est de même de la série :

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r$$

Donc les séries :

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \dots$$

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \dots$$

sont convergentes.
On voit que la condition est bien suffisante.

12/2/1935

Exemples

1°/ Montrons que $u = z^n$ est une fonction analytique.
A cet effet il faut montrer que u est une fonction dérivable et que sa dérivée ne dépend pas de l'accroissement dz

Cherchons :

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(z+\Delta z) - u(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z}$$

On peut développer $(z+\Delta z)^n$ suivant la formule du binôme. Alors :

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^n + \binom{n}{1} z^{n-1} \Delta z + \binom{n}{2} z^{n-2} \Delta z^2 + \dots \Delta z^n - z^n}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \left[n z^{n-1} \frac{\Delta z}{\Delta z} + \binom{n}{2} z^{n-2} \Delta z + \dots + \Delta z^{n-1} \right]$$

$$= n z^{n-1}$$

On voit bien que cette limite existe et qu'elle ne dépend pas de Δz ; on écrit :

$$\frac{du}{dz} = u' = n z^{n-1}$$

2°/ $u = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ est aussi une fonction analytique

$a_0, a_1 \dots$ sont des nombres réels ou complexes.

Montrons que sa dérivée existe.

On sait que la dérivée d'une somme égale la somme des dérivées de chaque terme de la somme. Or comme chaque terme de la somme :

$$a_n z^n$$

est dérivable comme on l'a vu ci-dessus, et sa dérivée ne dépend pas de dz. Il en est donc de même pour u.

Séries de puissances

Soit la série : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $\quad a_n =$ nombre réel ou imaginaire

Nous verrons que les séries de puissances sont des fonctions analytiques et qu'elles sont les fonctions les plus générales

Si l'on écrit :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

on suppose que la série est convergente

Nous avons vu qu'une condition suffisante de convergence d'une telle série était que la série

$$\sum |a_n z^n|$$

fut convergente. Ceci aura lieu en général pour certaines valeurs de z seulement. Au moins on a 3 cas :

1°/ La série n'est convergente pour aucune valeur de z
2°/ La série converge pour toutes les valeurs de z
3°/ La série est convergente pour certaines valeurs de z et divergente pour d'autres

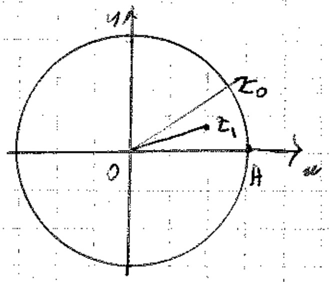
Théorème

Le domaine de convergence (ensemble de valeurs de z p/lesquelles la série est divergente) est un cercle dont l'origine est le centre. ou autrement : la série est convergente pour tous les points à l'intérieur du cercle ; elle est divergente à l'extérieur du cercle. (si la série converge pour toutes les valeurs de z, le rayon du cercle est infini ; si la série ne converge nulle part, le rayon du cercle est nul)

[Pour les points sur le cercle nous ne dirons rien pour le moment]

Supposons que la série

$$\sum a_n z_0^n$$



soit convergente.

Montrons que la série:

$$\sum a_n z_1^n$$

est aussi convergente pourvu que:

$$|z_1| < |z_0|$$

Démonstration

On sait que la condition nécessaire (pas suffisante) pour qu'une série soit convergente est que les termes de la série tendent vers 0.

Alors en appliquant ceci on a que puisque la série $\sum a_n z_0^n$ est convergente :

$$|a_n z_0^n| \to 0 \qquad \text{pour } n \to \infty$$

ou ce qui revient au même:

$$|a_n z_0^n| < M \qquad M = \text{valeur positive quelconque}$$

pour $n > n_0$.

Examinons la série $\sum a_n z_1^n$. On peut écrire:

$$\sum a_n z_1^n = \sum a_n z_0^n \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^n$$

Nous pouvons dire que si la série:

$$\sum |a_n z_0^n| \left|\frac{z_1}{z_0}\right|^n$$

est convergente il en sera de même de la série $\sum a_n z_0^n \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^n$ et par suite de la série $\sum a_n z_1^n$.

Mais les termes de la série $\sum |a_n z_0^n| \left|\frac{z_1}{z_0}\right|^n$ restent inférieurs à ceux de la série:

$$M \sum \left|\frac{z_1}{z_0}\right|^n$$

à partir d'un certain n_0 c'est-à-dire $n > n_0$

car pour $n > n_0$ nous avons: $|a_n z^n| < M$

Or la série: $\sum \left|\frac{z_1}{z_0}\right|^n$ est convergente car on a supposé $|z_1| < |z_0|$

Il en sera de même de la série :

$$M\sum \left|\frac{z_1}{z_0}\right|^n$$

Or si cette série les convergentes il en sera de même de la série : $\sum |a_n z_0^n| \left|\frac{z_1}{z_0}\right|^n$ dont les termes sont inférieurs à ceux de la série $M\sum \left|\frac{z_1}{z_0}\right|^n$ considérée.

Si $\sum |a_n z_0^n| \left|\frac{z_1}{z_0}\right|^n$ est convergente, il en est de même de la série $\sum a_n z_0^n \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^n$ ou de $\sum a_n z_1^n$

c.q.f.d.

La valeur z_0 est dite rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$.

et le cercle de centre O et de rayon z_0 est dit cercle de convergence.

Etudions le rayon de convergence de ces séries. En cet effet nous pouvons nous borner à des valeurs réelles car on a toujours une valeur réelle pour z_0 car le cercle coupe évidemment l'axe des x.

<u>Rappelons nous les critères des séries à termes réels.</u>

Soit la série :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

Cette série est convergente si :

1°/ $\sqrt[n]{|u_n|} \leq c < 1$

2°/ $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq c < 1$

Si $u_n = a_n z^n$ la première condition devient :

$$\sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \sqrt[n]{|a_n|}$$

La série est convergente si :

$$|z| \sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1 \quad \text{ou}$$

$$|z| \leq \frac{c}{\sqrt[n]{|a_n|}} < \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

$\sqrt[n]{|a_n|}$ est une suite de variables positives.

En nous abstenant du cas où cette suite tend vers l'infini on peut supposer que cette suite a une borne ou une limite supérieure ; cela veut dire que pour n assez grand les termes de la suite restent inférieurs à la limite plus ε (ε = quantité positive, aussi petite qu'on veut).

Nous supposons donc l'existence de :

lim sup. de $\sqrt[n]{|a_n|}$

Soit C cette limite ; à partir d'un certain **n** les $\sqrt[n]{|a_n|}$ sont inférieurs à $C+\varepsilon$. Nous disons que si :

$$|z| < \frac{1}{\text{lim sup de } \sqrt[n]{|a_n|}}$$

la série est convergente.

En effet $|z| \sqrt[n]{|a_n|}$ a pour limite :

$$|z|\, C$$

Mais on de la condition ci-dessus :

$$|z|\, C < 1$$

Si l'on pose : $c = |z|\,C + \varepsilon < 1$

On aura évidemment $|z| \sqrt[n]{|a_n|} < c < 1$

et alors la série sera bien convergente

13/2/1935

Nous avons vu que la série :

$$u = \sum a_n z^n$$

est convergente si :

$$|z| < \frac{1}{C}$$

C étant la limite supérieure de la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$

Nous pourrons prendre $\frac{1}{C}$ comme rayon de convergence de la série u. Seulement il faut démontrer en second lieu que :

Pour $|z| > \frac{1}{C}$ la série u est divergente.

Remarquons auparavant que l'existe de la limite supérieure implique 2 conditions:

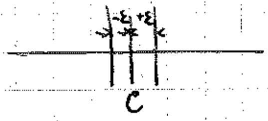
à partir d'un n assez grand

1°) Tous les $\sqrt[n]{|a_n|}$ restent au dessous de $C+\varepsilon$

ε étant un nombre positif aussi petit qu'on veut.

2°) Tous les $\sqrt[n]{|a_n|}$ restent au dessus de $C-\varepsilon$

ε étant positif.



Nous avons employé dans la démonstration de la première partie la 1ère condition. Nous emploierons la seconde condition pour la démonstration de la seconde partie.

On peut écrire:

$$\sqrt[n]{|a_n|} > C-\varepsilon$$

ou en multipliant les deux membres par le nombre positif fini

$$|z|$$

nous aurons: $|z|\cdot\sqrt[n]{|a_n|} > (C-\varepsilon)|z| = C|z| - \varepsilon|z|$

Mais par hypothèse on a:

$$C|z| > 1$$

On peut toujours trouver un ε tel que:

$$C|z| - \varepsilon|z| = c > 1$$

On aura alors:

$$\sqrt[n]{|a_n|}\,|z| > c > 1$$

ou $$|a_n||z|^n > c^n > 1$$

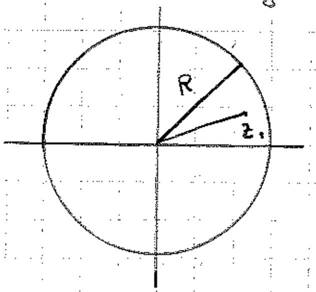
c étant supérieur à 1, c^n croît sans limite avec n, il en est donc de:

$$|a_n|\,|z|^n$$

et par suite le terme général de la série u croît sans limite avec n ce qui est justement contraire à la condition géné nécessaire de convergence disant que le terme général doit tendre vers 0 avec $n \to \infty$ ou plus généralement que l'on doit avoir: $|a_n||z|^n < M$

c'est-à-dire qu'à partir d'un certain n assez grand le terme général reste inférieur à un nombre M.
Cette condition n'a donc pas lieu dans notre série ; il s'ensuit donc que la série est divergente.

Donc si C est la limite supérieure de la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$ construisons le cercle de centre O et de rayon :



$$R = \frac{1}{\text{lim sup. de } \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{C}$$

En chaque point à l'intérieur de cercle la série est convergente. En chaque point hors du cercle est elle divergente.

<u>Exemples</u>

1°/ Soit la série :

$$u = 1 + 10z + 100z^2 + \cdots\cdots$$

Le terme général de cette série est :

$$10^n z^n$$

D'où $\quad a_n = 10^n$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = 10 = C$$

Il s'ensuit que $\quad R = \frac{1}{10}$

La série est donc convergente pour les z tels que :

$$|z| < \frac{1}{10}$$

et divergente pour les z tels que :

$$|z| > \frac{1}{10}$$

2°/ Soit la série : $\quad u = \sum_0^\infty n^{-n} z^n$

Ici : $\quad a_n = n^{-n}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = n^{-1} = \frac{1}{n}$$

La limite supérieure de $\frac{1}{n}$ est 0 car on a sûrement que pour n assez grand chaque $\frac{1}{n}$ est inférieur à $0 + \varepsilon$

et supérieur à $0-\varepsilon$ ε étant un nombre positif aussi petit qu'on veut.

Donc : $\mathcal{C}=0$

et alors : $R = \frac{1}{\mathcal{C}} = \frac{1}{0} = \infty$

C'est-à-dire que R est supérieur à tout nombre donné. Il s'ensuit donc que la série est convergente pour toutes les valeurs de z. Une telle série est dite :

série ou fonction entière

c'est la généralisation du polynôme car le polynôme a un nombre fini de termes tandis que ceux d'une série entière sont en nombre infini.

3°/ Série : $u = \sum_0^\infty n^n z^n$

Dans ce cas : $u_n = n^n$ et

$$\sqrt[n]{|u_n|} = n$$

La limite supérieure de n est donc au dessus de tout nombre donné. Il s'ensuit que : $\mathcal{C} = \infty$ et alors

$$R = \frac{1}{\mathcal{C}} = 0$$

La série ne converge pour aucune valeur de z.

Il s'ensuit qu'une expression telle que :

$$u = 1 + (2z)^2 + (3z)^3 + (4z)^4 + \cdots$$

n'a pas de sens car la fonction u n'est pas définie. Des opérations sur une telle fonction conduirait à des résultats absurdes.

Théorème Fondamental.

Chaque série de puissances est une fonction analytique pour tous les points à l'intérieur de son cercle de convergence.

Soit la série $u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

Pour montrer que c'est une fonction analytique, il faut montrer que sa dérivée existe.

Or en se basant sur le fait que la dérivée d'une somme égale la somme des termes de chaque terme, nous obtiendrons pour la dérivée de u une

série de la forme :

$$\Sigma\, n\, a_n\, z^{n-1}$$

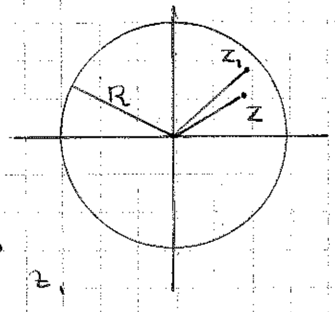
puisque la dérivée de $a_n z^n$ est comme on l'a vu (p. 120, Exemples I)

$$n a_n z^{n-1}$$

Pour montrer l'existence de la dérivée de u nous devons montrer deux choses :

1°/ que la série $\Sigma\, n a_n z^{n-1}$ a le même rayon de convergence que $\Sigma\, a_n z^n$ (puisque nous voulons que la dérivée de u existe pour tous les points à l'intérieur du cercle de convergence de u). — [la série $\Sigma\, n a_n z^{n-1}$ peut avoir un rayon de convergence spécial ; seulement ce rayon doit être égal sinon supérieur à celui de la série u]

2°/ que la série $\Sigma\, n\, a_n\, z^{n-1}$ est bien la dérivée de u.



<u>Démonstration</u>

1°/ Soit un point z à l'intérieur du cercle de convergence de la série u, de rayon R. Nous pouvons toujours trouver à l'intérieur du cercle un point z_1 tel que :

$$|z_1| > |z|$$

avec la condition que l'on ait toujours : $|z_1| < R$

c'est-à-dire : $|z| < |z_1| < R$

Puisque le point z_1 est à l'intérieur du cercle la série

$$\Sigma\, a_n\, z_1^n$$

est convergente. Cette condition implique qu'à partir d'un n assez

$$|a_n|\,|z_1^n| \longrightarrow 0 \quad \text{ou plus généralement :}$$

$$|a_n|\,|z_1^n| < M$$

Examinons la série $\Sigma\, n\, a_n\, z^{n-1}$

Nous pouvons écrire l'identité :

$$\left|n\, a_n z^{n-1}\right| = \left|n a_n z_1^n\right| \left|\frac{z}{z_1}\right|^{n-1} \left|\frac{1}{z_1}\right| = n\, |a_n|\,|z_1^n|\left|\frac{z}{z_1}\right|^{n-1}\left|\frac{1}{z_1}\right|$$

Mais puisque par hypothèse:

$$|a_n|\,|z_1^n| < M$$

on a évidemment

$$n\,|a_n z^{n-1}| = n|a_n|\,|z_1^n|\left|\frac{z}{z_1}\right|^{n-1}\left|\frac{1}{z_1}\right| < \frac{nM}{|z_1|}\left|\frac{z}{z_1}\right|^{n-1}$$

Mais en multipliant $\frac{nM}{|z_1|}\left|\frac{z}{z_1}\right|^{n-1}$ par $\left|\frac{z}{z_1}\right|\cdot\left|\frac{z_1}{z}\right| = 1$ on obtient

$$\frac{nM}{|z_1|}\cdot\left|\frac{z_1}{z}\right|\left|\frac{z}{z_1}\right|^{n-1}\cdot\left|\frac{z}{z_1}\right| = \frac{nM}{|z|}\left|\frac{z}{z_1}\right|^{n}$$

On a donc en définitive:

$$|na_n z^{n-1}| < \frac{nM}{|z|}\left|\frac{z}{z_1}\right|^{n}$$ 14/2/1935

C'est-à-dire que chaque terme de la série:

$\Sigma\, na_n z^{n-1}$ est inférieur à celui de la série

$\Sigma\, \frac{nM}{|z|}\left|\frac{z}{z_1}\right|^{n}$, en valeur absolue.

Or la série $\Sigma\, \frac{nM}{z}\left(\frac{z}{z_1}\right)^n$ est convergente ; en effet nous avons supposé: $\left|\frac{z}{z_1}\right| < 1$ car $|z| < |z_1|$

Posons: $q = \left|\frac{z}{z_1}\right|$; on a donc $q < 1$

D'autre part z est une valeur bien déterminée et aussi M. On a alors:

$$k = \frac{M}{|z|} = \text{cte}$$

Le terme général de la série $\Sigma\, \frac{nM}{z}\left(\frac{z}{z_1}\right)^n$ est en valeur absolue:

$$\frac{nM}{|z|}\left(\frac{z}{z_1}\right)^n = \frac{nM}{|z|}\,q^n = k\,n\,q^n$$

Appliquons le second critère de Cauchy à la série

$$\Sigma\, k\,n\,q^n$$

Le rapport de deux termes consécutifs est:

$$\lambda = \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{k(n+1)q^{n+1}}{k\,n\,q^n} = \frac{n+1}{n}\,q = \left(1+\frac{1}{n}\right)q$$

Or $\lim_{n\to\infty}\lambda = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)q = q$

Or comme $q < 1$ on a donc que le second critère de Cauchy est rempli. Par suite la série

$$\sum \frac{M}{|z|}\left|\frac{z}{z_1}\right|^n$$ et par suite la série : $$\sum \frac{M}{z}\left(\frac{z}{z_1}\right)^n$$

est convergente. Cela entraîne la convergence de la série :

$$\sum n a_n z^{n-1}$$

dont les termes sont inférieurs en valeur absolue à ceux de la série :

$$\sum \frac{M}{|z|}\left(\frac{z}{z_1}\right)^n$$

Ainsi la série : $\sum n a_n z^{n-1}$ est bien convergente pour chaque point du cercle de convergence de la série : $\sum a_n z^n$

2°/ Montrons que la série trouvée $\sum n a_n z^{n-1}$ est bien la dérivée de la série $\sum a_n z^n$.

A cet effet rappelons la notion de convergence *uniforme* d'une série.

Soit la série :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

où les $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$ sont des fonctions d'une même variable h :

$$u_1 = u_1(h)$$
$$u_2 = u_2(h)$$
$$u_3 = u_3(h)$$
$$u_4 = u_4(h)$$
$$\cdots\cdots$$

On dit que la convergence par rapport à h est uniforme si la série formée par les : U_r tels que :

$$|u_r(h)| < U_r \qquad \text{(avec } U_r \text{ indépendant de } h\text{)}$$

est convergente. Ceci implique :

1°/ L'existence de nombres U_r tels qu'ils soient indépendants de h et tels que $u_r(h)$ leur soit inférieur. (On pourrait prendre par exemple la borne supérieure de chaque $u_r(h)$

2°/ La convergence de la série :

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots\, U_r + \cdots$$

(L'année passée on avait appliqué la notion de convergence uniforme au calcul de l'intégrale

$$\int_0^\infty f(h,x)\,dx$$

qui était uniformément convergente si $|f(x,h)|$ étant inférieur à une fonction $F(x)$

la série $\int_0^\infty F(x)$ était convergente.

La propriété la plus importante d'une série uniformément convergente est que si chaque terme de la série est continu dans un intervalle, la somme de la série est aussi une fonction continue.

On peut montrer qu'une série de puissances est convergente uniformément pour tous les points de son cercle de convergence.

En effet soit un point z du cercle de convergence. Nous avons vu qu'il existe toujours un z_1 tel que:

$$|z| < |z_1| < R$$

Il s'ensuit que chaque chaque

$$a_n z^n$$

est inférieur en valeur absolue à $a_n z_1^n$ qui est justement indépendant de z. D'autre part puisque

$$|z_1| < R$$

la série $\sum a_n z_1^n$ est convergente et par suite la serie $\sum a_n z^n$ est uniformément convergente. Ceci a lieu pour chaque z du cercle de convergence. En d'autres termes, le rayon de convergence de la série

$$\sum a_n z^n$$

étant R et ρ étant une valeur très près de R mais inférieure à R on a que la série $\sum a_n z^n$ est uniformément convergente pour tous les z tels que:

$$|z| \leq \rho$$

Soit la série:

$$u = u_1 + u_2 + u_3 \dots$$

Les $u_1, u_2 \dots u_\nu$ étant des fonctions de z, ou plus simplement étant des puissances de n:

$$u_\nu = a_n z^n \quad ; \quad u = \sum a_n z^n$$

Cherchons la limite suivante:

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(z+h) - u(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sum a_n [(z+h)^n - z^n]}{h}$$

h est un nombre complexe aussi petit qu'on veut. Il est toujours possible de trouver à l'intérieur du cercle de convergence de u un point z_1 tel que:

~~$|z| < |z+h| < |z_1|$~~ $< R$

$$|z| < |z+h| < |z_1| < R$$

Comme h est indépendant de n nous pouvons la faire entrer à l'intérieur du signe de sommation et la limite cherchée sera:

$$\lim_{h\to 0} \sum \frac{a_n[(z+h)^n - z^n]}{h}$$

D'autre part nous savons que si p et q sont deux quantités réelles:

$$\frac{p^n - q^n}{p-q} = p^{n-1} + p^{n-2}q + p^{n-3}q^2 + \cdots + pq^{n-2} + q^{n-1}$$

Appliquons ceci à : $\frac{(z+h)^n - z^n}{h}$ après avoir remarqué que l'opération ci-dessus effectuée sur des nombres réels peut être aussi effectuée sur des nombres complexes puisque nous avons dit que les nombres complexes se comportaient algébriquement comme les nombres réels.

Donc posons: $p = z+h$

$q = z$

On a évidemment: $p - q = z+h-z = h$

et par suite: $\frac{p^n - q^n}{p-q} = \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = (z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + \cdots + z^{n-1}$

Nous avons n termes dans la somme ci-dessus car il y a z du degré 0 au degré n-1 en facteur chaque fois.

D'autre part puisque $|z+h| < |z_1|$ et $|z| < z_1$

on a que:

$$|(z+h)^{n-1}| < |z_1|^{n-1}$$

$$|z(z+h)^{n-2}| < |z_1||z_1|^{n-2} = |z_1|^{n-1}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$|z^{n-1}| < |z_1|^{n-1}$$

$$\left|\frac{(z+h)^n - z^n}{h}\right| = |S| < n|z_1|^{n-1}$$

et alors :

$$|a_n| \left|\frac{(z+h)^n - z^n}{h}\right| < n |a_n| |z_1|^{n-1}$$

Or la série $\sum n|a_n||z_1|^{n-1}$ est convergente pour z_1 car

$|z_1| < R$ voir démonstration 1% p. 128, 129.

Donc la série : $\sum \frac{a_n[(z+h)^n - z^n]}{h}$ est convergente aussi

et elle est de plus uniformément convergente car

$$|a_n| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} < n|a_n| |z_1|^{n-1}$$

et $n|a_n||z_1|^{n-1}$ est indépendant de h

Dans ces conditions la série :

$$\sum \frac{a_n[(z+h)^n - z^n]}{h}$$

est une fonction continue de h.

Or la particularité d'une fonction continue est que :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Par suite :

$$u' = \lim_{h \to 0} \frac{u(z+h) - u(z)}{h} = \lim_{h=0} \sum \frac{a_n[(z+h)^n - z^n]}{h} =$$

$$\text{valeur}_{h=0} \sum \left[a_n \left[(z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + \dots z^{n-1}\right]\right.$$

$$= \sum a_n n z^{n-1}$$

Donc :

$$u' = \sum a_n n z^{n-1}$$

Ainsi $\sum a_n n z^{n-1}$ est bien la dérivée de u.

<u>Remarque</u>

Nous voyons qu'une série de puissances possède bien une dérivée pour chaque point de son cercle de convergence. Or comme $\sum a_n n z^{n-1}$ est aussi une série de puissances, elle aussi a une dérivée et ainsi de suite. On peut dire donc qu'une ~~fon~~ série de puissances a une dérivée d'ordre quelconque pour tous les points à l'intérieur de son cercle de convergence.

Exemple.

Si l'on suppose que $a_n = \frac{1}{n!}$ on a alors la série :

$$\sum \frac{1}{n!} z^n = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

Ici $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \longrightarrow 0$ avec $n \to \infty$ et par suite

$$R = \infty$$

La série est convergente pour toutes les valeurs de z. C'est donc une fonction entière. On l'appelle la série exponentielle :

$$\mathcal{E}(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$$

18/2/1935

Calculons : $\mathcal{E}'(z)$

Nous aurons : $\mathcal{E}'(z) = \sum_0^\infty n \frac{1}{n!} z^{n-1}$

Mais pour $n=0$ $n \frac{1}{n!} z^n$ s'annule car $n=0$ et $0! = 1$

aussi on pourra écrire :

$$\mathcal{E}'(z) = \sum_0^\infty n \frac{1}{n!} z^{n-1} = \sum_1^\infty n \frac{1}{n!} z^{n-1} = \sum_1^\infty \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1}$$

Si l'on pose $m = n-1$ on aura que pour $n=1, m=0$ et alors :

$$\mathcal{E}'(z) = \sum_1^\infty \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_0^\infty \frac{z^m}{m!} = \mathcal{E}(z)$$

Donc pour chaque z on aura :

$$\mathcal{E}(z) = \mathcal{E}'(z)$$

Il est facile de voir aussi que $\mathcal{E}''(z) = \mathcal{E}(z)$ et ainsi de suite.

$$\mathcal{E}(z) = \mathcal{E}'(z) = \mathcal{E}''(z) = \mathcal{E}'''(z) \ldots \mathcal{E}^{n}(z)$$

Remarquons d'autre part que l'on peut considérer les séries absolument convergentes comme des polynômes et on peut opérer sur ces séries comme si l'on avait des nombres algébriques quelconques.

Ainsi : $\Psi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$

$\Phi(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$

$$\Psi(z)\,\Phi(z) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + \cdots$$

Cherchons le produit :

$$\mathcal{E}(z)\ \mathcal{E}(z_1)$$

Si l'on pose : $\frac{1}{n!} = a_n$ on aura :

$$\mathcal{E}(z)\,\mathcal{E}(z_1) = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)(a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_1^2 + \cdots) =$$

$$= a_0^2 + a_0 a_1 (z + z_1) + \cdots$$

$$\mathcal{E}(z)\,\mathcal{E}(z_1) = \sum_0^\infty \left[a_0 a_n z_1^n + a_1 a_{n-1} z z_1^{n-1} + a_2 a_{n-2} z^2 z^{n-2} + \cdots a_n a_0 z^n \right]$$

et si on remplace a_n par $\frac{1}{n!}$ on obtient :

$$\mathcal{E}(z)\,\mathcal{E}(z_1) = \sum_0^\infty \left[\frac{z_1^n}{n!} + \frac{1}{1!}\frac{z z_1^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} z_1^{n-1} z^2 + \cdots + \frac{z^n}{n!} \right]$$

$$= \sum_0^\infty \frac{1}{n!} \left[z_1^n + \frac{n!}{1!(n-1)!} z z_1^{n-1} + \frac{n!}{2!(n-2)!} z^2 z_1^{n-2} + \cdots z^n \right]$$

Mais $z_1^n + \frac{n!}{1!(n-1)!} z z_1^{n-1} + \cdots z^n = (z_1 + z)^n$

Donc : $\mathcal{E}(z) \cdot \mathcal{E}(z_1) = \sum_0^\infty \frac{(z_1+z)^n}{n!} = \mathcal{E}(z+z_1)$

D'autre part :

$$\mathcal{E}(1) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots = e$$

Avec toutes ces considérations on peut poser

$$\mathcal{E}(z) = e^z$$

z étant un nombre quelconque complexe ou non.

Jusqu'à présent e^z était défini pour les valeurs réelles de z. Il faut définir e^z pour les z complexes.

Nous avons montré que :

$$\mathcal{E}(z)\,\mathcal{E}(z_1) = \mathcal{E}(z+z_1) \quad \text{ou}$$

$$e^z \cdot e^{z_1} = e^{z+z_1}$$

Cette propriété qui existait quand les z étaient réels subsiste aussi quand les z sont complexes.

De plus nous avons montré que :

$$\mathcal{E}'(z) = \mathcal{E}''(z) = \mathcal{E}'''(z) \cdots$$

~~et~~ or une telle propriété ~~était bien~~ avait lieu pour e^z pour les z réels ; nous voyons qu'elle subsiste si les z

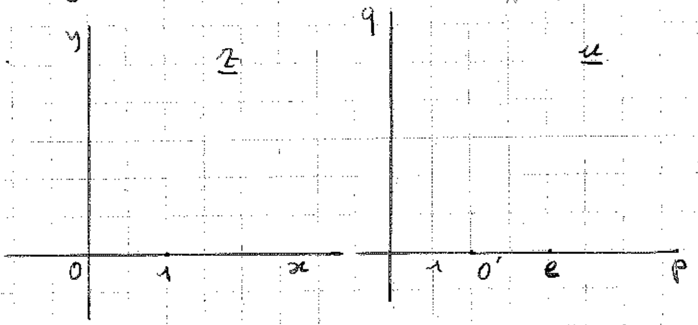
sont complexes.

Donc la fonction $\mathcal{E}(z) = e^z$ est définie pour toutes les valeurs de z complexes ou non par la série:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

Représentation géométrique

Nous avons vu que chaque fonction analytique définit une représentation conforme entre les deux plans z et u.



A chaque point du plan z il correspond un point du plan u.

Appliquons ceci à:

$u(z) = e^z$

Quand $z = 1$, $u = e$

Assignons à z un parcours ; cherchons le parcours correspondant dans le plan u.

Par exemple cherchons la figure correspondante à l'axe des x. Dans ce cas z n'a que des valeurs réelles. Par suite $u(z)$ aura seulement des valeurs réelles. Donc à l'axe réel du plan z correspond l'axe réel du plan u. Le correspondant du point 0 est :

$$u(0) = e^0 = 1$$

C'est donc le point O' tel que O' est situé à l'unité de distance du point de rencontre de p et de q.

Cherchons maintenant le correspondant de l'axe des y. Pour trouver ceci cherchons :

$$e^{yi}$$

y étant un nombre réel. A cet effet dans

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

remplaçons z par iy en remarquant que:

$$i^2 = -1 \quad ; i^3 = -i \quad ; i^4 = +1$$

et en séparant les parties réelles des parties imaginaires ;

nous aurons:

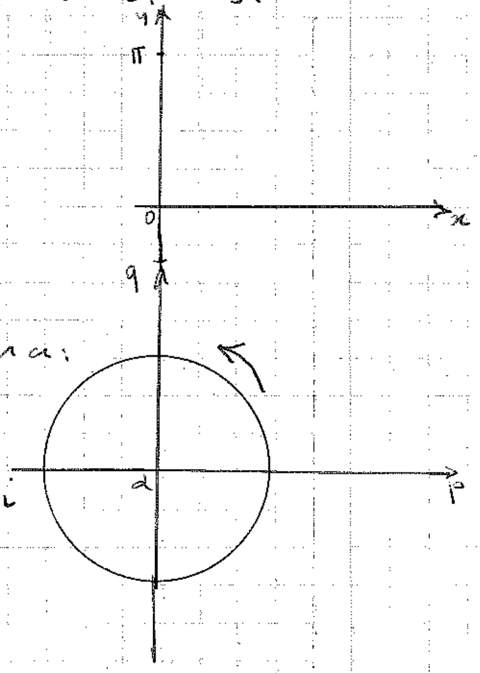
$$\cos e^{yi} = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots + i\left(\frac{y}{1} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \cdots\right)$$

Mais:

$$1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots = \cos y$$

$$y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \cdots = \sin y$$

Donc: $e^{yi} = \cos y + i \sin y$



Mais dans le plan des u, on a:

$$u = p + qi$$

Donc: $e^{yi} = \cos y + i \sin y = p + qi$

Ce qui donne:

$$\cos y = p$$
$$\sin y = q$$

Mais comme: $p^2 + q^2 = 1$, on voit que $\cos y + i \sin y$ représente dans le plan des u le cercle de centre α et de rayon 1.

Donc à l'axe des y correspond le cercle ci-dessus. Seulement si y varie de $-\pi$ à $+\pi$ le cercle est parcouru entièrement. Considérons donc un mobile qui parcourt l'axe des y. Quand le mobile va de 0 vers le sens positif on voit que le cercle correspondant dans le plan u est parcouru dans le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre), une fois jusqu'à ce que

$$y = 2\pi$$

et ainsi de suite une infinité de fois.
Quand on va de 0 vers le sens négatif le cercle est parcouru en sens inverse au sens trigonométrique une infinité de fois.

c) 19/2/1935

Cherchons maintenant le point du plan u correspondant à un z

$$z = x + iy$$

du plan z.

Nous avons: $u = e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy}$ (d'après la propriété de $E(z)$)

Mais on a montré ci-dessus que:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

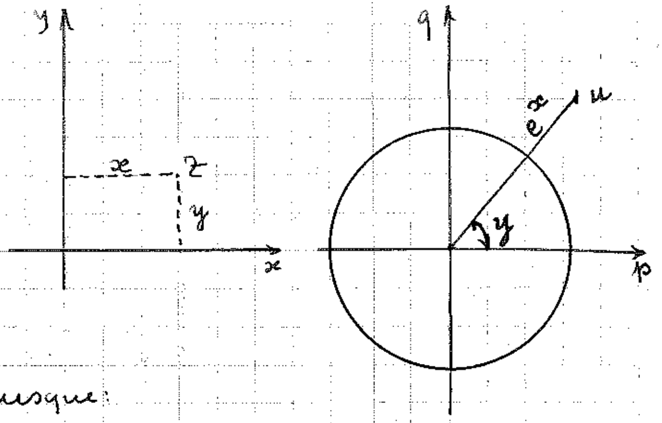
Donc: $u = e^x [\cos y + i \sin y] = e^x \cos y + i e^x \sin y$

Mais si les coordonnées de u sont p et q on aura:

$u = p + qi = e^x \cos y + i e^x \sin y$

ce qui exige que:

$p = e^x \cos y$
$q = e^x \sin y$



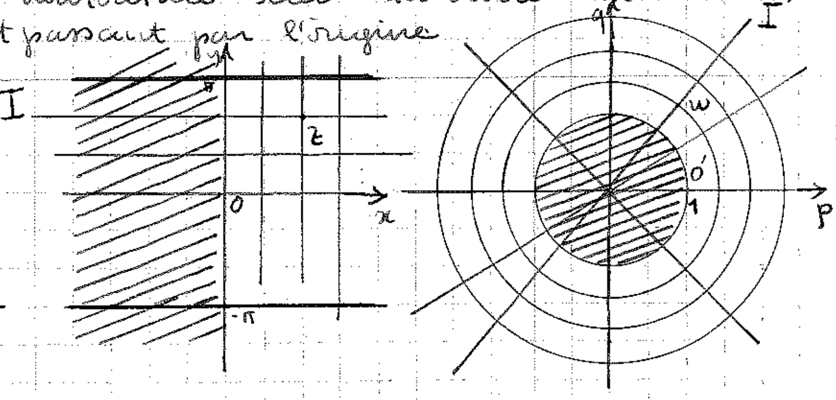
D'ailleurs plus simplement puisque:

$$u = e^x(\cos y + i \sin y)$$

on voit que le module de u est e^x et son argument y.

Ainsi au point z correspond un point u tel que son argument soit égal à ~~e^x~~ y et son module à e^x.
Nous remarquons que:

Le module de u n'est fonction que de x. Son argument n'est fonction que de y.
Les coordonnées cartésiennes de z ont été transformées en coordonnées polaires dans u.
Si nous considérons tous les z situés sur une horizontale, nous avons pour ces points le même y; il s'ensuit que le correspond de la droite horizontale sera la droite inclinée de y sur l'axe des p et passant par l'origine.



D'autre part, pour z se déplaçant sur une droite verticale, les x sont les mêmes. Ce qui montre que les correspondant d'une droite verticale du plan z est un cercle dans le plan u qui a pour centre l'origine et ~~do~~ dont le rayon est e^x.

Nous voyons donc que le réseau des droites horizontales et verticales a pour correspondants dans le plan u des cercles concentriques et des droites passant par l'origine. Il y a ici un fait remarquable:

Nous avons dit que la correspondance entre le plan z et le plan u conservait les angles. Ce fait a toujours lieu ci-dessus. Car, les droites horizontales et verticales sont rectangulaires, il faut qu'il en soit de même pour leurs correspondants. Or ~~pour~~ nous avons dit que les droites du plan u correspondantes aux droites horizontales du plan z passaient par l'origine. Donc elles sont bien normales aux circonférences.

D'autre part nous avons dit que le correspondant de l'axe des y était le cercle de rayon 1. De plus nous avons vu que le cercle était parcouru entièrement si y variait de $-\pi$ à $+\pi$.

Soit l'espace limité dans le plan des z et les deux droites horizontales d'ordonnées $-\pi$ et $+\pi$.

Considérons un point z à l'intérieur de cette espace. Son correspondant sera un certain point u. Si z décrit la droite horizontale I^+, le point u décrira la droite I' de $+0$ à $+\infty$. Si on fait la même chose pour tous les z de l'espace ci-dessus, jusque lorsque y varie de $-\pi$ à π, le cercle est parcouru entièrement, il y aura des droites I' dans tout le plan. Nous voyons donc qu'à l'espace considéré dans le plan z, correspond tout le plan u.

D'autre part si nous considérons dans le plan z des points hors de l'espace ci-dessus, nous aurons comme correspond dans le plan u un des points qui sont les correspondants de certains points de l'espace ci-dessus, obtenus par addition ou soustraction d'une multiple de 2π aux points situés hors de l'espace.

Nous avions :

$$|u| = e^{x}$$

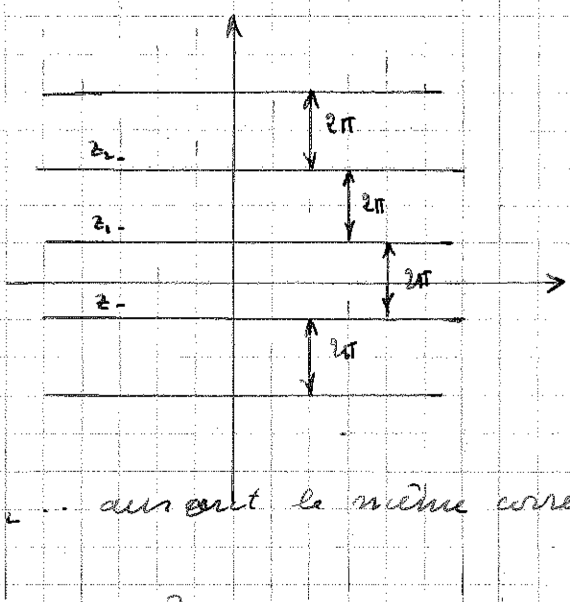
1° Pour $x=0$ nous avons $|u|$; c'est le cercle de rayon 1 qui est le correspondant de l'axe $x=0$ c'est-à-dire l'axe imaginaire.

2° Pour $x>0$, $|u|>1$; on a donc dans le plan u des points hors du cercle de rayon 1. Ils correspondent aux points dont le x est positif dans le plan z, c'est-à-dire aux points situés à droite de l'axe des y.

2° Pour $x<0$ $|u|<1$; Tous les points sont situés dans le cercle de rayon 1. Ils correspondent aux points de le x est négatifs, c'est-à-dire les points situés à gauche de l'axe des y. On dit que ce sont les points du demi plan gauche.

<u>Remarque</u>

Si on divise le plan z par des droites distantes de ~~deux~~ 2π, il y a dans chacune de ces parties un point qui aura le même correspondant qu'un autre point des l'autre parties.



Ainsi les points z, z_1, z_2 ... auraient le même correspondant parce que

$$z z_1 = z_1 z_2 = z_2 z_3 \dots = 2\pi$$

On pourra comprendre toutes ces considérations plus facilement si l'on définit la nouvelle fonction ci-dessous.

$$u = \ln z$$

Cette fonction est définie par la relation:

$$e^u = z$$

Cherchons ce qu'est cette nouvelle fonction. Si nous considérons

$$e^u = z$$

de manière que z soit une fonction de u, nous tombons dans le cas :

$$u = e^z$$

c'est-à-dire qu'à chaque courbe du plan u il correspond une courbe dans le plan z.

D'autre part en considérant la fonction $u = e^z$ nous avions vu que pour une même valeur de u on avait une infinité de point z. En appliquant ceci à notre nouvelle fonction:

$$u = \ln z$$

avec $e^u = z$

nous voyons que pour une seule valeur de z on aura une infinité de valeur de u, d'où la fonction

$$u = \ln z$$

n'est pas univoque.

Examinons si la fonction $e^u = z$ est une fonction analytique. A cet effet on pourrait montrer que l'on peut trouver une série de puissances dont e^u est la somme. Mais ceci est très long. Il vaut mieux montrer qu'une telle fonction est dérivable. Cherchons donc:

$$\frac{du}{dz} = \lim \frac{\Delta u}{\Delta z}$$

Nous avons vu que la fonction $u = e^z$ était une fonction dérivable. Alors en appliquant ceci à

$$z = e^u$$

z étant regardé comme fonction de u, on aura

$$\frac{dz}{du} = e^u$$

c'est-à-dire :

$$\frac{dz}{du} = \lim \frac{\Delta z}{\Delta u} = e^{u}$$

Nous cherchons la $\lim \frac{\Delta u}{\Delta z}$ c'est-à-dire de la valeur réciproque de $\frac{\Delta z}{\Delta u}$

Mais d'après certains théorèmes sur les limites on avait :

$$\lim \frac{1}{b} = \frac{1}{\lim b} \qquad [\lim b \neq 0]$$

b était réel. Mais comme les nombres complexes obéissent à toutes les règles algébriques, cette égalité subsiste même si b est complexe. En appliquant ceci on a :

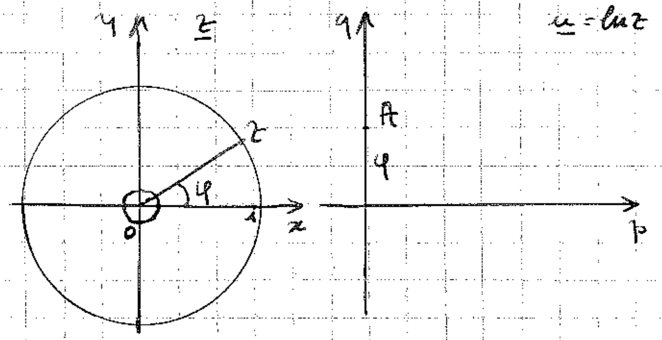
$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{1}{\lim \frac{\Delta z}{\Delta u}} = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{z}$$

Donc : $\lim \frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{du}{dz} = \frac{1}{z} \qquad [z \neq 0]$

Nous voyons donc que la fonction $z = e^u$ possède une dérivée en tous les points excepté le point 0. Donc cette fonction est une fonction analytique excepté au point 0

Cela peut être exprimé en disant la fonction $z = e^u$ est une fonction analytique pour tous les points hors du cercle de centre 0 et de rayon ε, ε étant un nombre aussi petit qu'on.

On dit que le point 0 est un point singulier de la fonction.



Examinons maintenant la correspondance géométrique des deux plans.

Soit dans le plan z le cercle de rayon 1 et de centre 0. Sur un point z de cercle on a :

$$|z| = 1$$

Mais on peut écrire : $z = re^{i\varphi}$, r étant le module de z et φ sont argument. Mais ici = r = 1 ; Donc

$$z = e^{i\varphi}$$

En comparant avec $z = e^u$ on voit que

$$u = i\varphi$$

ce qui montre que le correspondant du point z est un point A situé sur l'axe q à la distance φ de l'origine.

Ainsi au cercle de centre O et de rayon 1 dans z correspond l'axe des q du plan des u.

Mais ~~rapp~~ on peut écrire:

$$u = \ln z \quad \text{ou} \quad e^u = z$$
$$u_1 = \ln z_1 \quad \text{ou} \quad e^{u_1} = z_1$$

Mais $e^u . e^{u_1} = z_1 z = e^{u+u_1}$; mais cette égalité pourra s'écrire par suite de la définition de la fonction $u = \ln z$,

$$u_1 + u_1 = \ln(z_1 z)$$

~~Donc~~ Mais $u + u_1 = \ln z + \ln z_1$; donc

$$\ln(z_1 z) = \ln z + \ln z_1$$

qui est la propriété caractéristique des logarithmes.

Soit un point z quelconque. On a:

$$z = re^{i\varphi}$$

Et en prenant les log de part et d'autre

$$\ln z = \ln r + \ln e^{i\varphi}$$

Mais on peut écrire:

$$u = \ln z \quad \text{et} \quad e^u = z$$

En remplaçant z par sa valeur dans $\ln z$ on a:

$$u = \ln e^u$$

Alors: $\ln e^{i\varphi} = i\varphi$ et par suite:

$$\ln z = \ln r + i\varphi$$

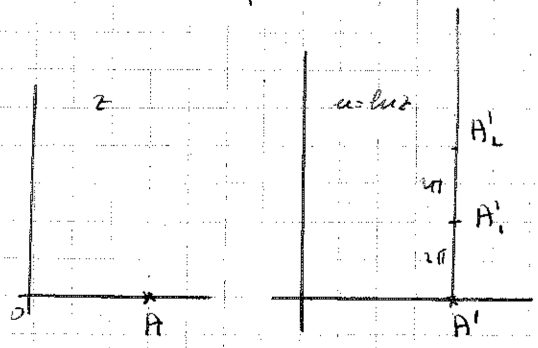
Mais φ était l'argument de z, on peut donc ajouter à φ un multiple de 2π sans changer la valeur de z. C'est-à-dire que l'on peut avoir:

$$z = re^{i\varphi + 2n\pi)} \qquad n = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

Alors: $\ln z = \ln r + i\varphi + 2in\pi$

Nous voyons que le logarithme d'un nombre a une infinité de valeur. Ainsi le logarithme est une fonction multiforme.

Cas particulier



Dans l'expression: $z = re^{i\varphi}$ si $\varphi = 0$ on a un nombre réel, A par exemple.

Or si dans $\ln z$ on fait $\varphi = 0$ on obtient:

$$\ln z = \ln r + 2in\pi$$

ce qui montre que le logarithme d'un nombre réel a une infinité de valeurs. L'une de ces valeurs est réelle: A' et toutes les autres sont complexes. ~~distan~~ elles ont même abscisse et elles sont distantes de 2π ou d'un multiple de 2π.

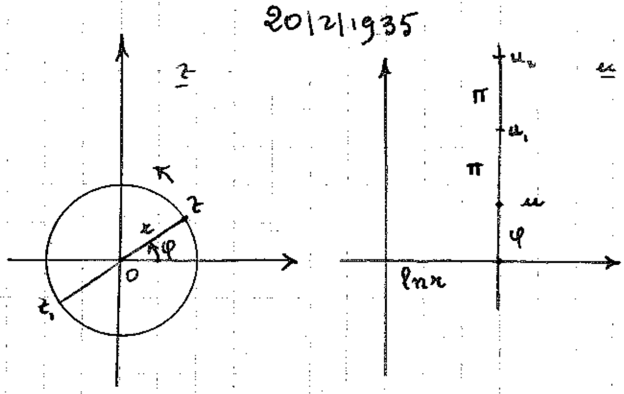
20/2/1935

Nous avons trouvé:

$$\ln z = \ln r + i\varphi + i2n\pi$$

Ou en faisant abstraction de $2n\pi$ pour le moment, nous aurons:

$$\ln z = \ln r + i\varphi$$



Soit un $z = re^{i\varphi}$ du point plan z. Son module est r et son argument φ. A ce point correspond un point u dont l'ordonnée est φ et l'abscisse $\ln r$.

Supposons que le point z se déplace dans son plan en parcourant le cercle de centre O et de rayon r. Puisque r est constant le point u se déplacera sur la droite verticale passant par u. Quand z vient en z_1, en parcourant le cercle dans le sens posi de la flèche, φ augmente de π. Alors le point u vient en u_1 tel que:

$$uu_1 = \pi$$

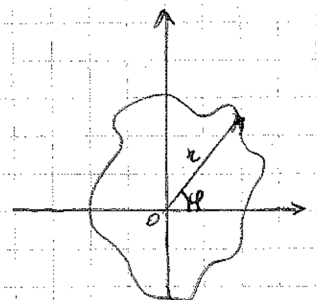
Si z continue son parcours et arrive de nouveau au point de départ z, φ aura augmenté de 2π et le point u viendra en u_2 tel que:

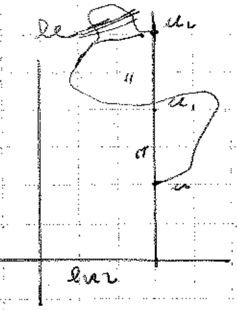
$$uu_2 = 2\pi$$

Ainsi quand z parcourt le cercle, le point u va de u à u_2.

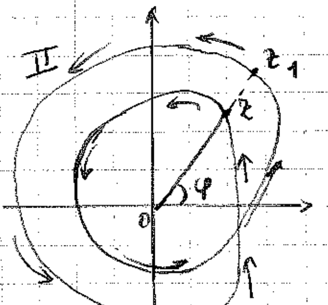
Si au lieu de parcourir le cercle, le point z se déplaçait

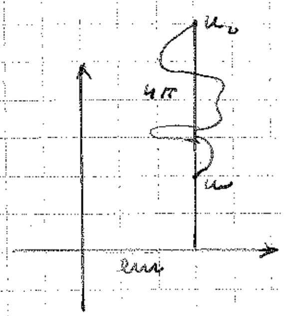
sur une courbe fermée contenant l'origine, on voit que le point u se déplacera sur une courbe telle que son point de départ soit u et son extrémité u_1 telle de manière que $uu_1 = 2\pi$, car l'angle φ a augmenté de 2π et le rayon r n'a pas changé.





Supposons que z parcoure la courbe II. C'est un parcours continu. Seulement quand z arrivera à sa position primitive l'angle φ aura augmenté de 4π car on a fait deux tours autour du point O





En général si z parcourt une courbe continue, contenant l'origine, en faisant n tours autour de l'origine avant d'arriver à sa position l'originale le point u sera situé à une hauteur $2n\pi$ au dessus de sa position primitive.

On voit que chaque point de l'a plan u et un point de même abscisse situé à une distance de u égale à un multiple de 2π sont les extrémités d'une courbe qui est le correspondant d'une courbe du plan z ~~obtenu par le parcours de z~~ par z de façon que le point fasse un nombre de tours égal au multiple ci-dessus avant de revenir à sa position primitive.

On voit donc que le plan des z peut être parcouru un nombre infini de fois avant que tout le plan u soit parcouru.

On peut supposer que le plan z est formé par des plans superposés exempts de toute épaisseur. Dans la figure ci-dessus pour la courbe II nous pouvons supposer que nous avons deux plans superposés. Quand le point z est arrivé en z_1 on ~~peut~~ a parcouru le premier plan et aussitôt en continuant on doit tomber dans le plan en dessus jusqu'à ce qu'on arrive au point z.

Nous voyons donc que le problème consiste à passer d'un plan à l'autre sans s'en apercevoir. Ceci explique qu'il doit y avoir une certaine liaison entre les plans superposés. Ces plans liés ainsi sont constituent ce qu'on appelle une surface de Riemann.

Chaque fonction analytique a sa surface de Riemann. Nous verrons plus tard les surfaces de Riemann avec plus d'explication

---

Un mot sur la fonction a^z où a est une constante réelle ou complexe, différente de 0 et de e.

Nous avons vu que la fonction e^z était définie

univoquement pour chaque z du plan par la série:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \cdots \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

Puisque a est différent de 0 nous pouvons parler de

$$\ln a$$

Défini par: $e^{\ln a} = a$

Alors: $a^z = (e^{\ln a})^z = e^{z \ln a}$

Comme $\ln a$ est une fonction multiforme, on voit a^z sera une fonction non univoque.

On peut prendre $e^{z \ln a}$ comme fonction définissante de a^z.

Remarque

a peut être un nombre réel négatif car on a toujours:

$$\ln a = \ln|a| + i\varphi + 2n\pi i$$

Ainsi la fonction $a^z = e^{z \ln a}$ a une infinité de valeurs pour un même a. Seulement il faut tenir compte de z. On a:

$$\ln a = \ln|a| + i\varphi + 2n\pi i$$

$$e^{z \ln a} = e^{z[\ln|a| + i\varphi + 2\pi n i]} = e^{z \ln|a|} e^{iz(\varphi + 2n\pi)}$$

Le terme qui introduit la multiplicité est $e^{iz(\varphi + 2n\pi)}$ car il y a dans ce terme n qui peut prendre les valeurs:

$$0, 1, 2, 3 \ldots$$

Seulement si z = un entier réel k:

$$e^{iz(\varphi + 2n\pi)} = e^{i(k\varphi + 2kn\pi)}$$

ce qui montre que $e^{i(k\varphi + 2kn\pi)} = e^{ik\varphi}$ car

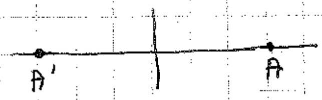
$ik\varphi$ ne ~~dépend de~~ diffère de $e^{i(k\varphi + 2nk\pi)}$ que de $2nk\pi$ qui est un nombre entier de fois $2k\pi$. Par suite:

$$a^z = e^{z \ln a} = e^{z \ln|a|} e^{ik\varphi} = e^{z \ln|a|} e^{iz\varphi} \qquad [z \text{ entier réel}]$$

ce qui montre que a^z est univoque pour chaque valeur de a pour tous les z entiers réels.

Si $z = 1/2$ on a pour le terme $e^{iz(\varphi + 2n\pi)}$; $e^{i(\frac{\varphi}{2} + n\pi)}$

Mais $e^{i(\varphi/2 + n\pi)}$ ne dépend diffère de $e^{\varphi/2}$ que de $n\pi$
si $n =$ pair on a toujours le point A.
Si $n =$ impair on a le point A'.



Donc à $a^{1/2}$ correspondent deux valeurs.

(résultat à prévoir car on sait que si a est réel, la racine carrée d'un nombre réel ~~est~~ a deux valeurs)

Si on prend $z = 1/3$, on aura 3 valeurs.

Si z = nombre irrationnel, on aura une infinité de valeurs.

En résumé: a^z est une fonction multiforme dont la multiplicité dépend de z.

<u>Fonction linéaire</u>

C'est la seule fonction analytique pour laquelle la surface de Riemann ne se compose que d'un seul plan (sans d'autres superpositions). C'est la fonction:

$$u = \frac{az+b}{cz+d}$$

a, b, c, d sont des constantes réelles ou complexes

<u>Remarque</u>
Cette définition de la fonction linéaire analytique diffère de la fonction linéaire à variable réelle. On se rappelle que cette dernière était:

$$y = ax + b$$

On a donc la fonction:

$$u = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (1)$$

à chaque valeur de z correspond une valeur de u, excepté si

$$cz + d = 0 \quad ; \quad z = -\frac{d}{c}$$

On peut écrire:

$$ucz + ud = az + b \qquad (2)$$

$$z = \frac{-du+b}{cu-a}$$

ce qui montre ~~aus~~ que z considéré comme fonction de u est aussi une fonction linéaire. A chaque valeur de u correspond une valeur de z.

On voit donc que u est univoque et il en est de même de z. Par suite ~~la~~ surface de Riemann est un plan unique.

Cherchons si la fonction linéaire est une fonction analytique. A cet effet montrons qu'elle a une dérivée.

Comme nous connaissons les règles de dérivation d'une somme et d'un produit appliquons ces règles à l'égalité (2).

$$c\,[\,u\,dz + z\,du] + d\,du = a\,dz$$

$$\frac{du}{dz} = -\frac{a-cu}{cz+d} = \frac{cu-a}{cz+d} = \frac{c\,\frac{az+b}{cz+d} - a}{cz+d}$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{cb-ad}{(cz+d)^2}.$$

On voit que $\frac{du}{dz}$ existe pour tous les z excepté:

$$z = -\frac{d}{c}$$

Donc la fonction ~~u~~ est une fonction analytique pour tous les z différents de:

$$-\frac{d}{c}$$

21/11/1935

Nous avons vu que la fonction linéaire est bien une fonction analytique.

On désigne ordinairement la fonction linéaire par le symbole

$$l(z)$$

qui est dique que l'on doit effectuer l'opération linéaire c'est-à-dire

$$\frac{az+b}{cz+d}$$

sur z.

Si l'on change les constantes a, b, c, d, on obtient une autre fonction linéaire:

$$l_1(x)$$

et ainsi de suite. On a ainsi une infinité de fonctions linéaires. Ces fonctions constituent donc un ensemble.

Nous emploierons aussi une notation nouvelle.
Soit u une fonction quelconque de z.

$$u = f(z)$$

Nous désignerons la fonction inverse de u par:

$$z = \overset{-1}{f}(u)$$

Le symbole -1 n'est pas ici un exposant. C'est tout simplement un signe conventionnel qui n'a aucun attribut que celui d'indiquer l'opération inverse.

Appliquons cette notation à la fonction linéaire.
Nous avons

$$u = f(z) = l(z)$$

La fonction inverse s'écrira:

$$z = \overset{-1}{l}(u)$$

Or nous avons vu que si u est une fonction linéaire de z, z est aussi une fonction linéaire de u aussi on pourra écrire

$$z = \overset{-1}{l}(u) = l_1(u)$$

Nous pourrons envisager la forme:

$$u = l\,[\,l_1(z)\,]$$

qui signifie ceci:
on effectue une opération linéaire l_1 sur z. ~~Puis on s'~~ On trouve une certaine fonction. Puis on effectue l'opération linéaire sur cette fonction. On obtient ainsi u.

Supposons: $l_1(z) = \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$; $u = \dfrac{a\,l_1(z) + b}{c\,l_1(z) + b}$; donc

$$u = \frac{a\,\dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b}{c\,\dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d} = \frac{(aa_1 + bc_1)z + ab_1 + bd_1}{(ca_1 + dc_1)z + cb_1 + dd_1}$$

Nous voyons que le résultat est une fonction linéaire toujours.

Donc l'itération de l'opération linéaire donne toujours une fonction linéaire.
En partant de cette propriété on peut dire que:
l'ensemble des fonctions linéaires constitue un groupe

On dit qu'un ensemble de valeurs constituent un groupe par rapport à une opération, si la répétition de cette

opération donne des valeurs qui font toujours partie de l'ensemble.

Il résulte de cette définition que les fonctions linéaires constituent un groupe.

Cette notion de groupe est très importante en mathématique. On la rencontre souvent, par exemple en arithmétique : les nombres entiers constituent un groupe par rapport à la multiplication car la multiplication effectuée entre des nombres entiers donne toujours un nombre entier.
On ne peut pas toutefois dire que les nombres entiers constituent un groupe par rapport à la division car la division de deux nombres entiers entre eux, ne donne pas toujours un nombre entier.
Mais on peut dire que les nombres rationnels constituent un groupe.

Reprenons l'étude de la fonction linéaire. Cherchons s'il existe des z tels que l'opération linéaire les laisse invariés. En d'autres termes existe-t-ils des z tels que

$$z = l(z) \qquad (1)$$

A cet effet on peut écrire :

$$z = \frac{az+b}{cz+d}$$

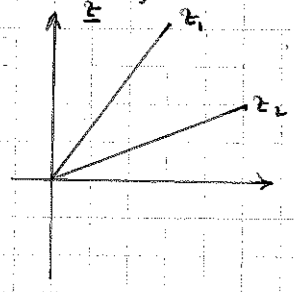
Soit enfin l'équation du second degré

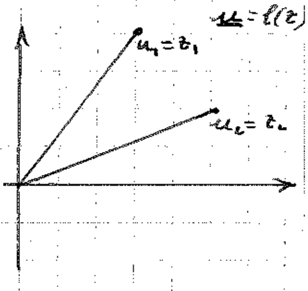
$$cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

On voit donc qu'en général il y a deux valeurs de z différentes pour lesquelles l'équation (1) est remplie. Il ne peut y avoir plus de deux valeurs de z. Et même il y a des cas où il y a une seule valeur : c'est le cas où le discriminant de l'équation ci-dessus s'annule.

Nous avons donc en général deux z pour lesquels :

$$u = z \quad \begin{cases} z_1 = u_1 \\ z_2 = u_2 \end{cases}$$





Théorème

Étant données trois valeurs différentes de z, α, β, γ et trois valeurs correspondantes de u, A, B, C il existe une fonction linéaire et une seule qui donne A, B, C quand on y fait $z = \alpha, \beta, \gamma$.

1/ Montrons d'abord qu'il n'existe qu'une seule fonction linéaire qui satisfasse aux conditions posées. En d'autres termes il faut prouver que si une telle fonction existe, elle est unique.

Supposons qu'il existe deux fonctions linéaires

$$u = l(z) \quad \text{et} \quad u_1 = l_1(z)$$

qui transforment α en A, β en B, γ en C

Considérons les inverses des fonctions ci-dessus.

$$l^{-1}(u) \quad \text{et} \quad l_1^{-1}(u)$$

L'égalité $z = l^{-1}[l(z)]$ est satisfaite pour tous les points du plan z car cette transformation donne le point lui même par sa propre fonction.

Considérons d'autre part le symbole

$$l^{-1}[l_1(z)]$$

Il signifie opération inverse effectuée sur $l_1(z)$.

Soit $l_2(z) = l^{-1}[l_1(z)]$

Appliquons les données.

Supposons que z prenne la valeur α, $l_1(z)$ prend alors la valeur A ; par l'opération inverse la valeur A est transformée en α. Donc l'opération $l_2(z)$ laisse α invarié.
On pourrait faire des considérations identiques pour β et γ. Ainsi l'opération $l_2(z)$ laisserait trois points invariés ce qui est impossible. Donc $l_1(z)$ n'existe pas ou se confond avec $l(z)$.
Ainsi l'unicité de la fonction est bien établie.

2/ Montrons qu'effectivement une telle fonction qui transforme α en A, β en B, γ en C existe.

Soit la fonction :

$$\frac{u-A}{u-C} \cdot \frac{B-C}{B-A} = \frac{z-\alpha}{z-\gamma} \frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}$$

C'est une fonction linéaire car soient :

$$l_1(u) = \frac{u-A}{u-C} \cdot K \qquad l_2(z) = \frac{z-\alpha}{z-\gamma} \cdot K'$$

On a :

$$l_1(u) = l_2(z)$$

En prenant la fonction inverse on a :

$$u = l^{-1}\,[l_2(t)]$$

qui n'est autre qu'une transformation linéaire.
Donc on a bien :

$$u = l(z)$$

(On pourrait le voir directement en chassant les dénominateurs et en tirant u en fonction de z. On obtiendrait une fonction linéaire.

Montrons que la fonction ci-dessus définie transforme bien α en A, β en B, γ en C.
En effet

si $z = \alpha$, le second membre s'annule ; pour que le 1er s'annule aussi il faut que :

$$u = A$$

si $z = \gamma$ on verrait facilement en inversant les deux fractions, que cette égalité entraîne

$$u = C$$

Si $z = \beta$ le second membre de l'égalité devient 1 il reste :

$$\frac{u-A}{u-B} \cdot \frac{B-C}{B-A} = 1$$ ce qui est évidemment vérifié si $u = B$

Nous voyons donc que la fonction cherchée existe bien et nous avons montré qu'elle est unique

<u>Signification géométrique</u>

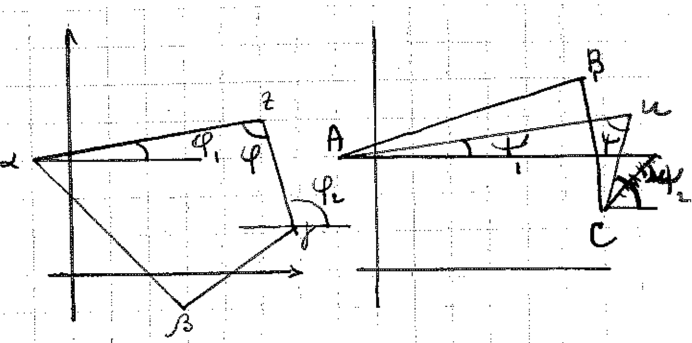
On peut écrire : $$\frac{z-\alpha}{z-\gamma} \cdot \frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha} = \frac{z-\alpha}{z-\gamma} : \frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma} \quad (1)$$

et $$\frac{u-A}{u-C} \cdot \frac{B-C}{B-A} = \frac{u-A}{u-C} : \frac{B-A}{B-C} \quad (2)$$

On voit que l'expression (1) est l'expression du rapport anharmonique des points $\alpha z \beta \gamma$: $(\alpha z \beta \gamma)$

De même (2) est $(A u B C)$.

Le théorème nous donne que les deux rapports anharmoniques sont égaux. Donc on a le résultat:



La transformation linéaire laisse invarié le rapport anharmonique de 4 points

<u>Conséquence</u>: si z parcourt une droite ou un cercle, u parcourt une droite ou un cercle. (à une droite ne correspond pas nécessairement une droite, c'est peut être un cercle et réciproquement) En d'autres termes:

à l'ensemble des droites et des cercles correspond l'ensemble des droites et des cercles.

En effet on a:

$$\frac{z-\alpha}{z-\gamma} K = \frac{u-A}{u-C} K'$$

Prenons les log de par et d'autre:

$$\ln\left(\frac{z-\alpha}{z-\gamma}\right) = \ln\left(\frac{u-A}{u-C}\right) + c^{te} \qquad (1)$$

Or dans un nombre complexe la partie imaginaire est donnée par

$$e^{i\varphi}$$

φ n'est donc autre chose que $\ln z$. En d'autres termes le log. du nombre donne l'argument

Donc $\Im \ln\left(\frac{z-\alpha}{z-\gamma}\right) = \ln(z-\alpha) - \ln(z-\gamma)$ on a les arguments de $z-\alpha$ et $z-\gamma$. Hors $z-\alpha = \overline{z\alpha}$

et $z-\gamma = \overline{z\gamma}$; désignons par φ_1 et φ_2 les arguments respectifs de $\overline{z\alpha}$ et $\overline{z\gamma}$ et par ψ_1 et ψ_2 ceux de $u-A$ et $u-C$.

L'égalité (1) devient:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \psi_1 - \psi_2 + c^{te}$$

Mais il est facile de voir que:

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \quad \text{et} \quad \psi = \psi_2 - \psi_1$$

Donc:

$$\varphi = \psi + \text{cte}$$

Alors si $\varphi = \text{cte}$ [z décrit un cercle] on a évidemment $\psi = \text{cte}$. Ce qui montre que u aussi décrit un cercle.

Si $\varphi = 0$ [le point z décrit une droite],

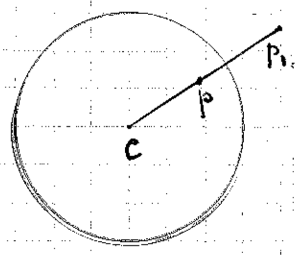
$$\psi = \text{cte}$$

Il est donc possible que dans ce cas u décrive un cercle. Si la cte = 0 le point u décrit alors une droite

On a les mêmes relations quand on fait décrire à u un cercle ou une droite, on a alors les variations de z.

25/11935

Nous avons vu que les cercles du plan z se transforment en des cercles du plan u. Dans cet énoncé les droites sont comprises car les droites peuvent être considérées comme des cercles de rayon infini.



Nous disons que deux points p et p_1 sont inverses par rapport au cercle de centre C et de rayon r si:

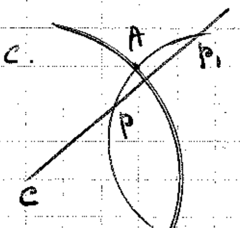
1°/ Les deux points sont sur une droite qui passe par C

2°/ $\overline{Cp} \cdot \overline{Cp_1} = r^2$

Théorème

Si les points p et p_1 sont inverses par rapport au cercle C, les points correspondants à p et p_1 sont inverses par rapport au cercle correspondant au cercle C.

Pour démontrer ce théorème il faut se rappeler certaines propriétés de l'inversion:



Tout cercle qui passe par p et p_1 est orthogonal à C.

En effet la puissance de C par rapport à ces cercles est R^2 et comme la puissance s'exprime aussi par le carré de

la tangente du point C au cercle considéré. Comme $CA = R$ on voit que CA est tangente à ce cercle et par suite ce cercle et le cercle C sont orthogonaux.

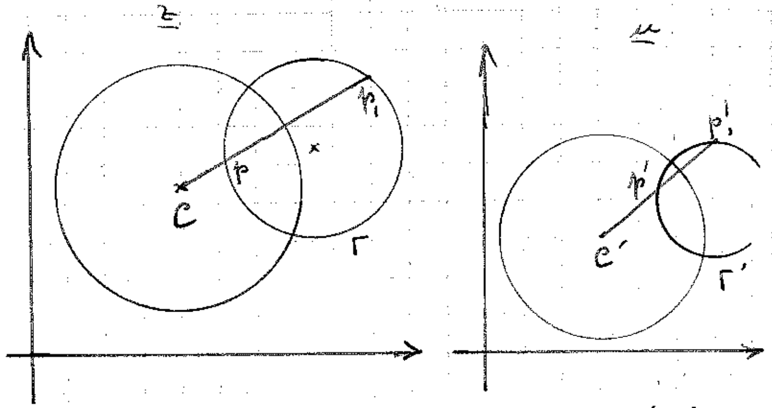
La réciproque est vraie aussi: si on a un cercle Γ orthogonal à C, toute sécante passant par C coupe le cercle Γ en deux points inverses par rapport au cercle de centre C.

En effet on a dans ce cas que CA est tangente au cercle Γ et par suite:

$$\overline{CA}^2 = R^2$$

ce qui qui montre que $\overline{Cp}.\,\overline{Cp_1} = R^2$

Maintenant démontrons le théorème.



Soient p' et p'_1 les correspondants de p et p_1 et C' le centre du cercle correspondant à C. Montrons que p' et p'_1 sont inverses par rapport à ce cercle.

En effet nous avons dit au début que la correspondance entre les plans z et u était une correspondance conforme, c'est-à-dire qu'elle conserve les angles.

Par suite si Γ et C sont ~~les~~ orthogonaux, le cercle Γ' qui correspond à Γ (il passe évidemment par p' et p'_1 qui sont les correspondants de p et p_1) sera orthogonal au cercle de centre C'. Or d'après la réciproque ci-dessus concernant les propriétés de l'inversion on voit que puisque Γ' et C' sont orthogonaux, p' et p'_1 sont inverses

c. q. f. d.

On peut à partir des propriétés ci-dessus traiter des applications.

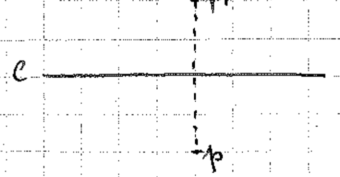
Le problème le plus général est le suivant:

On donne les cercles C et C' (centres et rayons) et on demande la transformation linéaire qui transforme le cercle C en C'. Le problème est encore indéterminé car on n'a donné que deux conditions. (centres et rayons) Comme il faut une troisième, on pourrait dire qu'en outre à tel point du plan z correspond un tel point du plan u.

Nous ne traiterons pas ce problème dont les calculs sont un peu longs et que l'on résoudra dans les travaux pratiques.

Remarque

Cherchons ce qui il arrive si le cercle C se réduit à une droite.
Dans ce cas le centre du cercle C est rejeté à l'infini.
Que signifie alors l'inverse du point p par rapport à la droite?



Afin de savoir ce que c'est, disons que les propriétés de l'inversion restent conservées. Par exemple,
Il faut que le cercle qui passe par p et son inverse soit orthogonal à C.

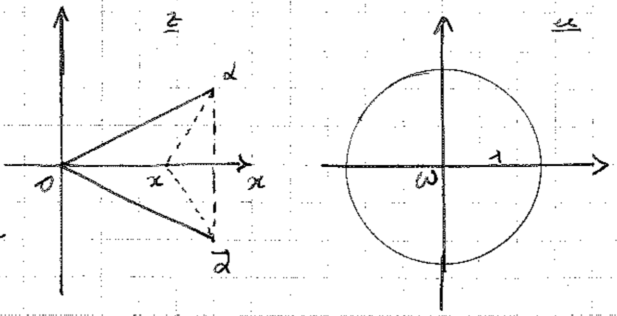
Puisque C est une droite, les cercles orthogonaux à C sont centrés sur cette droite, de sorte que l'inverse de p n'est autre que le symétrique de p par rapport à C.

Ainsi l'inversion par rapport à une droite se traduit par la symétrie. La réciproque est vraie

Comme le point p_1 serait l'image du point p si C était un miroir plan, on appelle souvent par analogie, ~~la reflex~~ l'inversion la reflexion.

Problème

Trouver une transformation linéaire qui fasse correspondre à l'axe des abscisses du plan z, le cercle unitaire (centre : point de rencontre des axes de coordonnées, rayon 1) du ~~feuille~~ plan u.



Soit α un point du plan z. Le point inverse de α par rapport à l'axe des x est le symétrique de α par rapport à cet axe. Ce point et α auront donc leurs parties réelles égales et leurs parties imaginaires opposées. Donc ce point et α sont conjugués. On désigne par $\bar{\alpha}$ le conjugué de α.

Revenons au plan u. Il y aura nécessairement dans le plan z un point qui corresponde au point de rencontre des coordonnées du plan u [puisqu'à chaque point de l'un des plans correspond un point de l'autre]

Supposons que ce soit α le point qui correspond à ω.

puisqu'à l'axe des x correspond le cercle unitaire, et à α correspond ω, à l'inverse de α par rapport à l'axe des x correspondra l'inverse de ω par rapport au cercle unitaire. Or l'inverse de α est $\bar{\alpha}$ et l'inverse du point ω est à l'infini puisque ω coïncide avec le centre du cercle unitaire. La fonction satisfait donc aux conditions:

$$z = \alpha \qquad u = 0$$
$$z = \bar{\alpha} \qquad u = \infty$$

c'est donc une fonction de la forme:

$$u = \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}\, c \qquad c = cte$$

qui remplit bien ces 2 conditions

Pour avoir c opérons ainsi. A un point x de l'axe des x faisons correspondre un point sur le cercle.

Si $z = x$:
$$u = \frac{x - \alpha}{x - \bar{\alpha}}\, c$$

Puisque u est sur le cercle:

$$|u| = \left| \frac{x-\alpha}{x-\bar{\alpha}}\, c \right| = \left| \frac{x-\alpha}{x-\bar{\alpha}} \right| |c| = 1$$

Or $x - \alpha = \overline{x\alpha}$ et $x - \bar{\alpha} = \overline{x\bar{\alpha}}$; or par raison de symétrie:

$$\overline{x\alpha} = \overline{x\bar{\alpha}}$$

Donc:
$$\left| \frac{x-\alpha}{x-\bar{\alpha}} \right| = 1 \quad ; \quad \text{ceci entraîne que:}$$

$$|c| = 1$$

Par suite c est de la forme $c = e^{i\varphi}$
et alors:

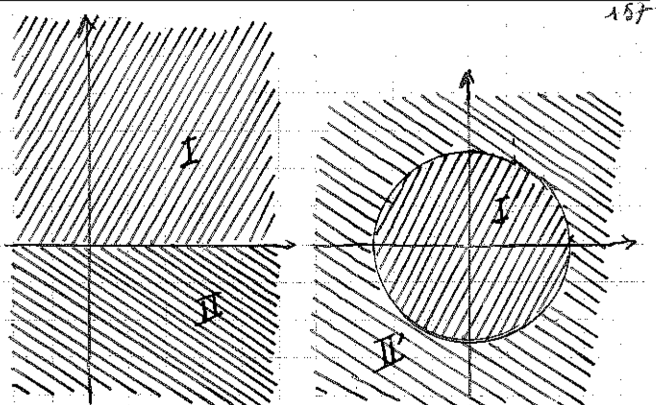
$$u = \frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}\, e^{i\varphi}$$

On voit qu'il y a 3 valeurs arbitraires:

$$\alpha,\ \bar{\alpha},\ \varphi$$

Comme en analyse on s'intéresse surtout aux domaines il faut voir ce que fait ω quand α parcourt un domaine d'une façon continue.

La réponse est que ω aussi décrit un domaine de façon continue.



Si α décrit tout le demi plan supérieur, A' décrira contenu dans le cercle unitaire car quand α vient jusqu'à l'axe des x le point A va jusqu'au cercle.

Le demi-plan inférieur est transformé dans tout le domaine extérieur au cercle unitaire.

Si on voulait avoir l'inverse: au demi-plan inférieur corresponde le cercle unitaire, il faudrait ajouter certaines choses:

$$u = \frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}} e^{i\varphi}$$

Ceci a lieu quand la partie imaginaire de α est négative. Si α décrit le ½ plan inférieur sa partie imaginaire est toujours inférieure à 0 (négative). Alors si nous désignons par

$$\mathcal{I}(\alpha)$$

la partie imaginaire de α nous aurons en résumé que:

la fonction $u = \dfrac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}} e^{i\varphi}$ transforme

1°/ Le demi-plan supérieur en cercle unitaire si:

$$\mathcal{I}(\alpha) \geq 0$$

2°/ Le demi-plan inférieur en cercle unitaire si

$$\mathcal{I}(\alpha) \leq 0$$

Problème

On donne le cercle unitaire du plan z et le cercle unitaire du plan u. Quelle est la transformation la plus générale qui fasse correspondre au premier cercle, le second.

On aurait pu dire immédiatement:

$$u = z$$

La fonction u satisferait bien à la condition posée mais elle ne serait pas la solution la plus générale.

Pour résoudre le problème, considérons un point α du plan z. Déterminons son inverse par rapport au cercle unitaire.

Si $\alpha = a e^{i\varphi}$, l'inverse de α aura pour module:

$$\frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{a}$$

D'autre part comme α et son inverse doivent être sur la même droite, leurs arguments sont égaux. Par suite l'inverse de α sera:

$$\frac{1}{a} e^{i\varphi}$$

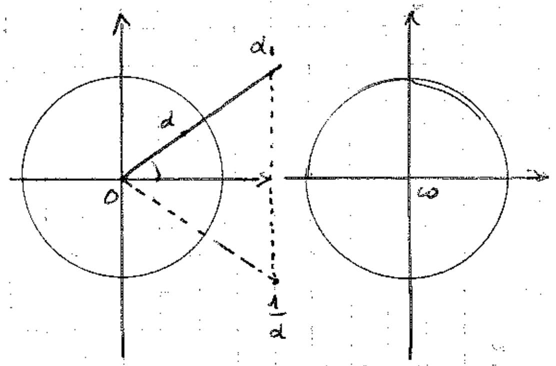
On peut écrire ceci sous la forme:

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{e^{-i\varphi}} = \frac{1}{a e^{-i\varphi}}$$

Mais $a e^{-i\varphi} = \bar{\alpha}$ Donc l'inverse de α est

$$\frac{1}{\bar{\alpha}}$$

Supposons que α soit le point correspondant à ω. L'inverse de ω par rapport au cercle unitaire sera: ∞



Donc:

$z = \alpha \qquad u = 0$

$z = \frac{1}{\bar{\alpha}} \qquad u = \infty$

On a donc la fonction

$$u = \frac{z - \alpha}{z - \frac{1}{\bar{\alpha}}} c \qquad (c = c^{te})$$

26 |2| 1935

Pour déterminer c il faut appliquer la condition que:

quand $|z| = 1$, $|u| = 1$

A cet effet considérons la valeur absolue de: $z - \alpha$

$$|z - \alpha|$$

On peut écrire: $|z - \alpha| = |\overline{z - \alpha}| = |\bar{z} - \bar{\alpha}|$

D'autre part nous nous mettons dans le cas où $|z| = 1$ Alors on peut diviser par: $|\bar{z}|$ qui a évidemment la même valeur que $|z|$. De sorte que:

$$|z - \alpha| = |\bar{z} - \bar{\alpha}| = \left| 1 - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{z}} \right|$$

D'autre part il est évident que:

$$z\bar{z} = re^{i\varphi} \cdot re^{-i\varphi} = r^2$$

Comme ici $r=1$, on a:

$$z\bar{z} = 1 \quad \text{ou}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{z} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\bar{z}} = z$$

Par suite:

$$|z-\alpha| = \left|1 - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{z}}\right| = \left|1 - \bar{\alpha} z\right| \qquad (1)$$

D'autre part:

$$u = \frac{z-\alpha}{z-\frac{1}{\bar{\alpha}}}\, c = \frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}\, \bar{\alpha} c$$

En prenant les valeurs absolues:

$$|u| = \frac{|z-\alpha|}{|\bar{\alpha}z-1|}\, |\bar{\alpha} c|$$

Quand $|z|=1$ on a d'après (1):

$$|z-\alpha| = |1-\bar{\alpha}z| \quad \text{ou}$$

$$\frac{|z-\alpha|}{|1-\bar{\alpha}z|} = 1$$

Si l'on fait $|u| = 1$ on a donc:

$$|\bar{\alpha} c| = 1$$

Ce qui entraine: $\bar{\alpha} c = e^{i\varphi}$

Par suite:

$$u = \frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}\, e^{i\varphi}$$

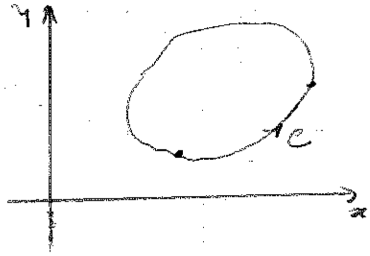
C'est la fonction qui fait correspondre le cercle unitaire de z au cercle unitaire de u. Pour faire correspondre les domaines intérieurs aux cercles on doit supposer:

$$|\alpha| < 1$$

Remarque
On aurait pu prévoir qu'il y aurait le facteur $e^{i\varphi}$ dans l'expression de u. En effet ce facteur indique une rotation d'un certain angle φ.
Or il est facile de voir que la rotation d'un point n'empêche pas que les deux cercles se correspondent. Il suffit que son module soit égal à 1.

§.2. Théorème et Intégrale de Cauchy

Jusqu'à présent nous n'avons traité que de la différentiation des fonctions analytiques. Abordons maintenant le problème de l'intégration.
Rappelons nous auparavant la notion d'intégrale curviligne traitée dans l'analyse réelle.



Soient deux fonctions : $p(x,y)$ et $q(x,y)$
Considérons d'autre part une courbe C sur laquelle un sens de parcours a été choisi.
On désigne par

$$\int_{(C)} (p\,dx + q\,dy)$$

l'intégrale étendue le long de C et que l'on appelle intégrale curviligne.
On avait trouvé aussi la formule importante de Green qui transformait une intégrale curviligne en une intégrale double dans le cas où la courbe C est une courbe fermée.

Toutes ces considérations s'appliquent aux fonctions des variables complexes.

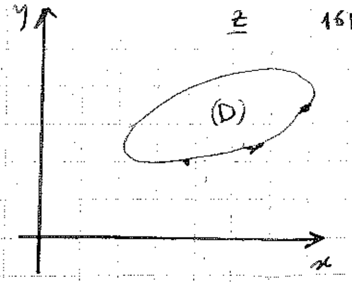
Soit donc: $$z = x + iy$$

$$u(z) = p(x,y) + i\,q(x,y)$$

Si l'on suppose que $u(z)$ soit une fonction analytique on a les conditions de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x}$$



Supposons que dans le plan z soit donnée une courbe C.

On définit l'égalité suivante :

$$\int_{(C)} u\,dz = \int_{(C)} (p+iq)(dx+i\,dy)$$

$$\int_{(C)} u\,dz = \int_{(C)} (p\,dx - q\,dy) + i \int_{(C)} (q\,dx + p\,dy)$$

$\int_{(C)} u\,dz$ est l'intégrale curviligne de la fonction u étendue de le long de la courbe C.

Comme $\int_{(C)} (p\,dx - q\,dy)$ et $\int_{(C)} (q\,dx + p\,dy)$

sont des intégrales curvilignes bien déterminées car elles sont formées ~~par~~ rien que par des valeurs réelles, il s'ensuit que :

$$\int_{(C)} u\,dz$$

a une valeur bien déterminée

Supposons que la courbe C soit fermée. Choisissons sur le long de cette courbe un sens de parcours.

Cherchons à appliquer la formule de Green trouvée pour les fonctions réelles à l'intégrale :

$$\oint_{(C)} u\,dz$$

On sait que :

$$\int_{(C)} (p\,dx + q\,dy) = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y}\right) dx\,dy$$

(formule de Green)

D désigne le domaine enfermé par la courbe C.
Cette formule s'appliquait avec certaines restrictions :

Les fonctions p et q doivent être définies et continues de l'intérieur de tout le domaine $\mathcal{D}$ et le long de la courbe. Les dérivées $\frac{\partial q}{\partial x}$ et $\frac{\partial q}{\partial y}$ doivent être définies et continues dans le même domaine.

(Cette formule suppose que la courbe est parcourue dans le sens positif c'est-à-dire le sens inverse des aiguilles d'une montre)

Appliquons la formule de Green aux intégrales

$$\int_{(C)} (p\,dx - q\,dy) \quad \text{et} \quad \int_{(C)} (q\,dx + p\,dy)$$

On aura:

$$\oint_{(C)} (q\,dx + p\,dy) = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$\oint_{(C)} (p\,dx - q\,dy) = -\iint_{(D)} \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x}\right) dx\,dy$$

On a donc:

$$\oint_{(C)} u\,dz = -\iint_{(D)} \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x}\right) dx\,dy + \iint_{D} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y}\right) dx\,dy$$

or comme u est une fonction analytique:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

On voit par suite que:

$$\oint_{(C)} u\,dz = 0$$

L'intégrale complexe le long d'une courbe fermée est nulle.

Seulement on a certaines conditions:

1° p et q doivent avoir des valeurs univoques, bien définies et continues dans le domaine D et le long de la courbe C.

2° $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y}$ continues et bien définies dans ~~l'int~~ le domaine considéré. Cette dernière condition donne puisque:

$$\frac{du}{dz} = \frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial q}{\partial x} = -i\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial y}$$

que $\frac{du}{dz}$ soit continue et définie.

En résumé on appelle fonction holomorphe dans le domaine D une fonction telle que:

1° En chaque point du domaine D. la fonction a une seule valeur. En d'autres termes elle doit être <u>univoque</u> dans D

2°/ Il existe en chaque point une dérivée de u. (La fonction u doit être dérivable dans D)

3°/ Cette dérivée est une fonction continue dans D. (Dérivée continue)

On peut donc énoncer le théorème suivant dû à Cauchy:

<u>Théorème</u>

Si (C) est une courbe fermée tracée dans le domaine D où la fonction u est holomorphe ; l'intégrale de u étendue le long de C s'annule.

Si nous appliquons ce théorème à la fonction linéaire:

$$u = \frac{az+b}{cz+d}$$

nous pourrons dire que :

cette fonction est holomorphe excepté dans un domaine contenant le point $z = -\frac{d}{c}$ pour lequel u est indéterminé.

Donc l'intégrale le long d'une courbe fermée de la fonction linéaire s'annule pourvu que le domaine de la courbe C ne contienne pas le point $-\frac{d}{c}$.

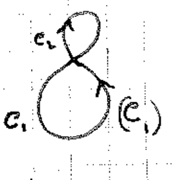
27/12/1935

L'intégrale.

$$\oint_{(C)} u\,dz = 0$$

pourvu que le domaine à l'intérieur de la courbe et le long de la courbe C la fonction u soit holomorphe.

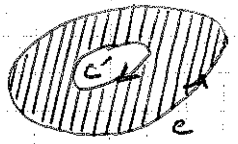
La courbe (C) est une courbe simple. Mais le théorème subsiste même si (C) n'est pas une courbe simple pourvu que la fonction soit holomorphe. C'est le cas de la courbe C_1 qui a un point double.



Si long si tout le domaine est holomorphe, l'intégrale le long de C_1 sera nulle et il en sera de même de C_2. On aura bien que l'intégrale le long de C_1 sera nulle.

On peut encore généraliser l'étendue du domaine

On peut considérer deux courbes C et C' l'une dans l'autre. Cherchons l'intégrale curviligne le long de C et C'.

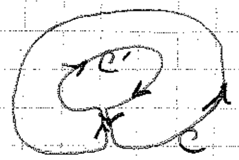


Adoptons auparavant la convention de sens de parcours suivante :

(Le sens positif de parcours est celui dans lequel on parcourt la courbe, le domaine adjacent à la courbe étant à sa gauche.

Cherchons donc l'intégrale curviligne le long de C et C'.

A cet effet supposons que nous fassions une coupure dans le domaine compris entre les deux courbes de manière à aller de C en C'.



Si dans le domaine intérieur aux deux courbes et le long de la courbe la fonction u est holomorphe on aura que

l'intégrale curviligne le long de C et C' en passant par la coupure est nulle car cette nouvelle courbe est fermée.

Mais d'autre part la coupure peut être supposée aussi étroite que possible, même une ligne droite. De plus l'intégrale étendue le long de la coupure sera étendue deux fois, une fois dans un sens et une fois en sens inverse comme on le voit sur la figure. Or les une intégrale curviligne étendue sur une courbe qui est parcourue une fois dans un sens, change de signe quand la courbe est parcourue en sens inverse (on l'a vu dans l'analyse réelle).

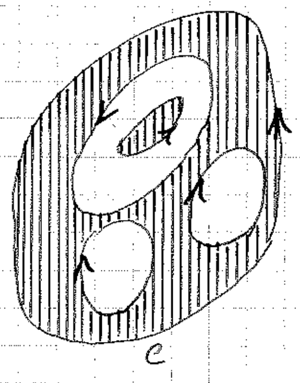
Par suite dans l'intégrale curviligne totale (C et C') l'intégrale le long de la coupure sera une fois dans un sens et une fois dans un autre. La somme sera donc nulle et on aura donc :

$$\int_{(C)} u\,dz + \int_{(C')} u\,dz = 0$$

(à la condition que la convention de signe soit la même pour les deux courbes)

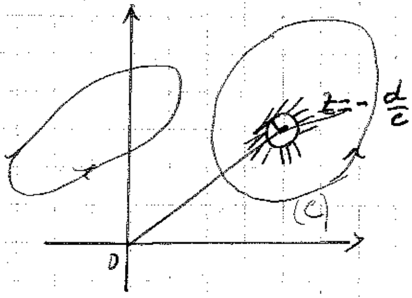
Ceci subsiste même si le domaine intérieur à C' (C' excepté) n'est pas holomorphe pour la ~~courbe~~ fonction u.

On peut encore généraliser au cas où la courbe C enferme de nombreux domaines.



Les sens de parcours étant bien déterminés (convention ci-dessus) et si toutes les courbes et les domaines hachurés sont holomorphes pour la fonction u l'intégrale curviligne étendue le long de toutes les courbes limitant les domaines est nulle (même si les parties en blanc, les limites exceptées ne sont pas des domaines où la fonction est holomorphe)

Prenons la fonction linéaire:



$$u = \frac{az+b}{cz+d}$$

La fonction n'est pas holomorphe au point:

$$z = -\frac{d}{c}$$

Supposons déterminé ce point dans le plan des z. Pour toute courbe ne renfermant pas le point $z = -\frac{d}{c}$ l'intégrale curviligne étendue le long de cette courbe est nulle.

Considérons une courbe (C) enfermant le point en question. L'intégrale le long de cette courbe n'est pas nulle. Cependant considérons un cercle infiniment petit enfermant le point $z = -\frac{d}{c}$. Nous savons que l'intégrale curviligne étendue le long de C et de ce cercle sera nulle pourvu que les sens soient bien choisis. Donc:

$$\oint_C u\,dz + \oint_{C_1} u\,dz = 0$$

Si on change le sens de C_1 on aura:

$$\oint_C u\,dz - \oint_{C_1} u\,dz = 0$$

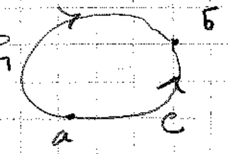
ou

$$\oint_C u\,dz = \oint_{C_1} u\,dz \quad : \quad \oint_{(C)} u\,dz = \oint_{(C_1)} u\,dz$$

Ces deux intégrales sont égales mais non nulles. Elles le seraient si ~~elles ne renfer~~ les courbes C

et C_1 ne renfermaient pas le point $z=-\frac{d}{c}$.

Conséquences du théorème de Cauchy et des considérations ci-dessus



I.- Soient donnés deux points b et a dans le plan z.

Considérons une courbe C quelconque.

$$\int_{(C)} u\,dz$$

n'est pas nulle.

Toutefois considérons une autre courbe C_1 qui constitue avec C un domaine fermé. Si la fonction u est holomorphe le long de C et C_1 et aussi dans le domaine enfermé par ces deux courbes,

$$\oint_{C+C_1} u\,dz = 0$$

ou

$$\oint_{C} u\,dz + \oint_{C_1} u\,dz = 0$$

et si l'on suppose que C_1 est parcourue en sens inverse on aura :

$$\oint_{C} u\,dz = \oint_{C_1} u\,dz$$ (C et C_1 parcourues dans le sens positif)

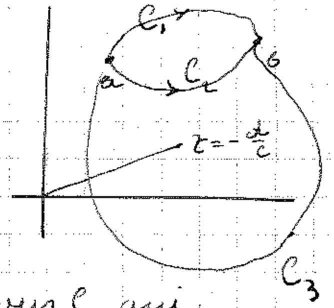
On arrive donc au résultat suivant :

Les intégrales curvilignes étant le long de deux courbes joignant deux points a et b sont égales pourvu que ces deux courbes soient tracées dans un domaine holomorphe et qu'elles soient parcourues dans le même sens.

Ce résultat peut s'énoncer aussi de cette manière :

L'intégrale curviligne étendue de a à b ne dépend pas du chemin mis pour aller de a à b à la condition que ce chemin ne soit tracé dans un domaine holomorphe pour la fonction u.

Dans le cas d'une fonction linéaire on a par exemple que ceci a bien lieu pour tous les points sauf le point $z=-\frac{d}{c}$



Mais si on a que :

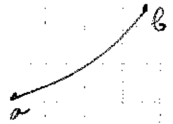
$$\oint_{C_1} u\,dz = \int_{C_2} u\,dz$$

on ne peut écrire la même chose pour C_3 qui contient justement le point $z = -\frac{d}{c}$.

$$\int_{C_3} u\,dz \neq \int_{C_1} u\,dz$$

II Supposons que la fonction u soit holomorphe dans tout le plan. Dans ce cas

$$\int_a^b u\,dz$$



a un sens.

Cette intégrale dépend de a et b.
Supposons a fixe et b variable. Soit :

$$b = z$$

Le point z parcourt le plan.

Soit la fonction :

$$v(z) = \int_a^z u\,dz$$

Montrons que $v(z)$ est une fonction analytique et que sa dérivée par rapport à z est u.

En effet on peut écrire :

$$v(z) = \int_a^z u\,dz = \int_a^z (p\,dx - q\,dy) + i\int_a^z (q\,dx + p\,dy)$$

Remarquons que :

$$p\,dx - q\,dy \qquad \text{et} \qquad q\,dx + p\,dy$$

sont des différentielles exactes car on a :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} \qquad (u \text{ est une fonction analytique})$$

Rappelons nous maintenant ceci:

Soit $F(t)$ une fonction définie par:

$$F(t) = \int_{const.}^{X(t)} f(x)\,dx$$

La limite supérieure $X = X(t)$

On sait d'après la règle de Leibnitz que tout simplement:

$$\frac{dF(t)}{dt} = f(X)\frac{dX}{dt} \quad \text{ou} \quad dF = f(X)\,dX$$

En appliquant ceci immédiatement aux intégrales

$$\int^{z}(pdx + qdy) \quad \text{et} \quad \int^{z}(q\,dx + pdy)$$

D'où l'on aura:

$$dv = pdx + qdy + i\,(qdx + pdy)$$

car $pdx - qdy$ et $qdx + pdy$ sont des différentielles exactes.

On peut écrire:

$$dw = pdx + i^2 qdy + iqdx + ipdy$$

$$dw = dx(p + iq) + idy(p + iq)$$

$$dw = (p + iq)(dx + idy)$$

Mais $\quad p + iq = u$

$\quad dx + idy = dz$

Donc: $\quad dw = udz \quad ;$

$$\frac{dw}{dz} = u$$

v est donc bien une fonction analytique et sa dérivée est u. Ainsi

$$v(z) = \int_a^z u(z)\,dz \qquad \text{est bien définie}$$

Application

I Soit $u = z^n$. Cette fonction est holomorphe est pour tous les points du plan pourvu que n soit positif

(les polynomes et les séries convergentes de puissances positives sont holomorphes car leurs dérivées sont continues)

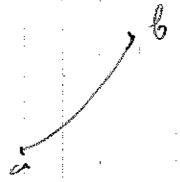
Calculons $\int_a^b z^n dz$

Cette intégrale est fonction de b. Cherchons s'il existe une fonction de b qui dérivée donne la valeur de la fonction pour $z = b$. Une telle fonction existe, c'est:

$$\frac{b^{n+1}}{n+1}$$ car sa dérivée est b^n qui

est bien la valeur de u pour $z = b$.

On pourra donc écrire:



$$\int_a^b z^n dz = \frac{b^{n+1}}{n+1} + C^{te}$$

Il est facile de voir que si b tend vers a l'intégrale est nulle. En effet si b se confond avec a le chemin ab s'annule et on sait que l'intégrale étendue le long d'une courbe nulle s'annulle.

Donc:

$$0 = \frac{a^{n+1}}{n+1} + C^{te}$$

Donc: $$C^{te} = -\frac{a^{n+1}}{n+1}$$

et on a en définitive:

$$\int_a^b z^n dz = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

II Supposons que $u = \frac{1}{z}$

C'est une fonction holomorphe exceptée au point O

Nous cherchons $\int_a^b \frac{dz}{z}$

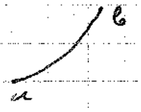
Nous savons que $\ln b$ dérivé donne : $\frac{1}{b}$.

On pourrait donc écrire :

$$\int_a^b \frac{dz}{z} = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$$

Seulement ceci n'est pas exact car on sait que la fonction logarithmique n'est pas une fonction univoque Et par suite $\ln \frac{b}{a}$ a une infinité de valeurs.

Mais si nous allons de a à b par un chemin déterminé, il doit y avoir une valeur bien déterminée de



$$\int_a^b \frac{dz}{z}$$

pour ce chemin.

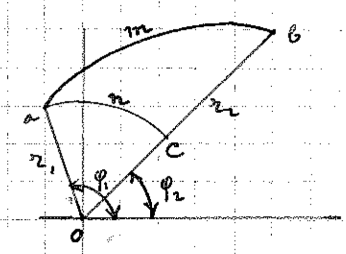
28/2/1935

En général l'intégrale

$$\int_a^b \frac{dz}{z}$$

dépendra du chemin de a à b. Cherchons l'intégrale pour un chemin bien déterminé

Soit le chemin amb.



Nous cherchons $\int_a^b \frac{dz}{z}$ pour ce chemin.

Considérons le chemin anc qui est un arc de cercle de centre O et de rayon Oa.

Puisque le cycle fermé ancbma est un cycle fermé ne renfermant pas le point O, nous avons en vertu de la conséquence I du théorème de Cauchy (p. 166)

$$\int_a^b \frac{dz}{z} = \int_a^c \frac{dz}{z} + \int_c^b \frac{dz}{z}$$

De a à c $|z|$ reste constant et égal à $|a|$
De c à b l'argument de z reste constant

Soient : $z = re^{i\varphi}$; $a = r_1 e^{i\varphi_1}$; $b = r_2 e^{i\varphi_2}$

On a : $dz = dr e^{i\varphi} + ri e^{i\varphi} d\varphi$

$$\frac{dz}{z} = \frac{dre^{i\varphi} + rie^{i\varphi}d\varphi}{re^{i\varphi}} = \frac{dr}{r} + i\,d\varphi$$

Nous avons que:

$$\int_a^b \frac{dz}{z} = \int_a^c \frac{dz}{z} + \int_c^b \frac{dz}{z}$$

Mais de a à c on a vu que r est constant
Donc de a à c:

$$dr = 0$$

De même de c à b φ est constant; donc de c à b

$$d\varphi = 0$$

et en changeant convenablement les limites nous aurons:

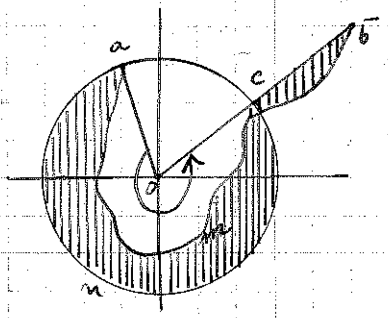
$$\int_a^b \frac{dz}{z} = i\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi + \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}$$

$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ et $\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \log \frac{r_2}{r_1}$ car

r est une valeur réelle de logarithme bien déterminé.

Donc: $\int_a^b \frac{dz}{z} = \log \frac{r_2}{r_1} + i(\varphi_2 - \varphi_1) = \ln\frac{r_2}{r_1} + i$ ~~(φ)~~

On voit donc maintenant que $\int_a^b \frac{dz}{z}$ a une valeur bien déterminée: partie réelle et partie imaginaire bien fixes.



Soit maintenant un chemin qui contourne le point O: acm.

Dans ce cas l'arc ac et le chemin acm forment un domaine où la fonction n'est pas holomorphe. On ne peut donc pas appliquer le theoreme de Cauchy à ce domaine.

Toutefois si on prend au lieu de l'arc ac, l'arc anc on a le domaine hachuré où ~~dz~~ $\frac{1}{z}$ est holomorphe. On pourra appliquer le théorème de Cauchy. Nous aurons toujours:

$\int_a^b \frac{dz}{z} = \log \frac{r_2}{r_1} + i\varphi_1$ et ici $\varphi_1 = 2\pi - \varphi$ car au lieu de l'arc ac on a pris l'arc anc qui égale $2\pi - \widehat{ac}$

Cas particulier

Si a et b sont sur une même circonférence de centre O, on a :

$$r_1 = r_2$$

et alors : $\log \frac{r_2}{r_1} = \log 1 = 0$

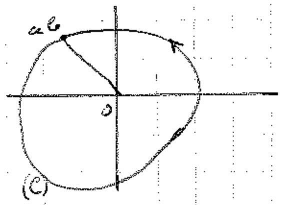
et : $\int_a^b \frac{dz}{z} = i\psi$

Si les points a et b sont confondus de façon que l'on aille de a à b en parcourant le cercle une fois seulement on a :

$$\psi = 2\pi$$

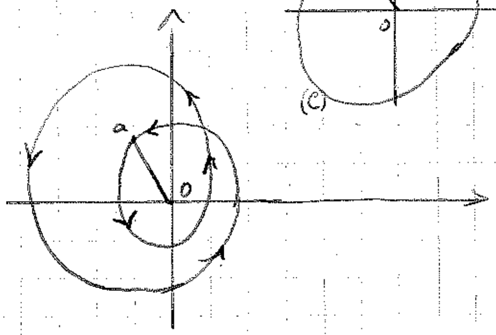
et $\oint_{(C)} \frac{dz}{z} = 2\pi i$

Cette relation subsiste même si l'on a une courbe quelconque enfermant le point O et telle qu'on puisse la parcourir entièrement en tournant seulement de 2π



Dans le cas où il faut tourner deux fois pour parcourir la courbe entièrement on aura :

$$\oint_{(C)} \frac{dz}{z} = 4\pi i$$

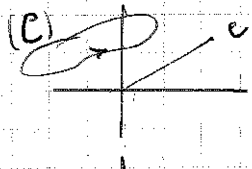


(les relations subsistent pour des courbes quelconques parce que l'intégrale ne dépend pas dans ce cas que de l'angle ψ)

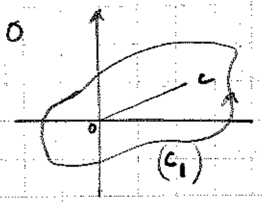
Les mêmes considérations s'appliquent à la fonction

$$u = \frac{1}{z-c}$$

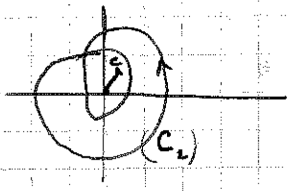
avec cette seule différence qu'ici le point singulier au lieu d'être l'origine est le point c.



Dans ce cas 1°/ $\oint_{(C)} \frac{dz}{z-c} = 0$



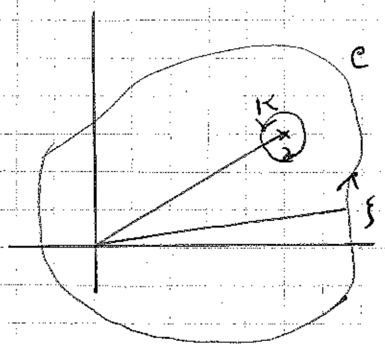
2°/ $\oint_{(C_1)} \frac{dz}{z-c} = 2\pi i$



3°/ $\oint_{(C_2)} \frac{dz}{z-c} = 4\pi i$

Intégrale de Cauchy

Soit une fonction $u(z)$ que nous supposerons pour le moment holomorphe pour tout le plan.
Donnons nous un point z du plan et cherchons à calculer $u(z)$ en ce point.



Considérons une courbe fermée C entourant le point. La fonction $u(z)$ est par hypothèse holomorphe dans le domaine intérieur à la courbe et sur la courbe.

Montrons que:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

ξ est une variable utilisée pour l'intégration et qui disparaît après cette opération.

Considérons un cercle K de rayon ρ entourant le point z.

Montrons que:

$$\oint_{(C)} \frac{u(\xi)\, d\xi}{\xi - z} = \oint_{(K)} \frac{u(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

Ceci découle des considérations faites p. 165 (au bas de la page)

pourvu que le long de C et le long de K ainsi que ~~la fonction~~ dans le domaine entre C et K la fonction:

$$\frac{u(\xi)\, d\xi}{\xi - z}$$

soit holomorphe.

Or $u(\xi)$ est sûrement holomorphe par hypothèse,

La fonction $\dfrac{u(\xi)}{\xi - z}$ ne serait pas holomorphe

seulement au point $\xi = z$

Mais le point z étant à l'extérieur du domaine ~~inté~~ compris entre les deux courbes il s'ensuit que

La fonction

$$\frac{u(\zeta)}{\zeta - z}$$

est bien holomorphe dans le domaine considéré et par suite nous aurons bien:

$$\mathcal{I} = \oint_{(C)} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \oint_{(K)} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Nous pouvons écrire en ajoutant et le retranchant la constante $u(z)$:

$$\mathcal{I} = \oint_{(K)} \frac{u(\zeta) + u(z) - u(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$\mathcal{I} = \underbrace{\oint_{(K)} \frac{u(z)}{\zeta - z} d\zeta}_{\mathcal{I}_0} + \underbrace{\oint_{K} \frac{u(\zeta) - u(z)}{\zeta - z} d\zeta}_{\mathcal{I}_1}$$

Mais on a:

$$\mathcal{I}_0 = \oint_{(K)} \frac{u(z)\ d\zeta}{\zeta - z} = u(z) \oint_{(K)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

Mais $\oint \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ est de la forme $\oint \frac{dz}{z - c}$ traitée page 172 (au bas)

Nous avons vu que dans le cas qui nous intéresse (la courbe K qui est un cercle entoure le point singulier et c'est une courbe simple)

$$\oint_{(K)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$$

Donc $\mathcal{I}_0 = u(z) . 2\pi i$

Reprenons l'intégrale $\mathcal{I}_1 = \oint_{(K)} \frac{u(\zeta) - u(z)}{\zeta - z} d\zeta$

En supposant que le point ζ décrive le cercle K, il est facile de voir que:

$$\zeta - z = \rho e^{i\varphi}$$

ρ étant le rayon du cercle et φ un angle variable de 0 à 2π car ζ peut décrire le cercle.
(ceci découle de la soustraction de deux nombres complexes)

En différentiant l'expression ci dessus on a: (par rapport à ζ et φ, z = cte)

$$d\zeta = \rho i e^{i\varphi} d\varphi$$

Dans ce cas I_1 devient en remplaçant $\xi - z$ et $d\xi$ par leurs valeurs:

$$I_1 = \oint_{(K)} \frac{u(\xi) - u(t)}{\rho e^{i\varphi}} \cdot \rho e^{i\varphi} i \, d\varphi = i \oint_{(K)} \left[u(\xi) - u(t)\right] d\varphi$$

En supposant que tout le cercle soit décrit: [φ varie de 0 à 2π]

$$I_1 = i \int_0^{2\pi} \left[u(\xi) - u(t) \right] d\varphi$$

En prenant les valeurs absolues de part et d'autre (on peut le faire car $u(t)$ ou $u(\xi)$ sont des fonctions analytiques) et en remarquant que i ne change pas leur valeur absolue on a:

$$|I_1| = |i| \int_0^{2\pi} \left| u(\xi) - u(t) \right| d\varphi$$

Mais nous pouvons appliquer le théorème de la moyenne car nous avons des valeurs absolues, on aura:

$$|I_1| \leq 2\pi |i| \left| u(\xi) - u(t) \right| d\varphi_{max}$$

Or nous pouvons prendre ρ aussi petit qu'on veut de sorte que ξ et z diffèrent d'une quantité aussi petite que l'on veut et la différence:

$$u(\xi) - u(t)$$

sera inférieure ~~à toute~~ en valeur absolue à toute quantité positive. Ce qui montre que finalement

$$u(\xi) = u(t)$$

et I_1 tend vers 0.

On aura alors:

$$I = \oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{\xi - z} d\xi = I_0 = u(z) \cdot 2\pi i$$

soit:

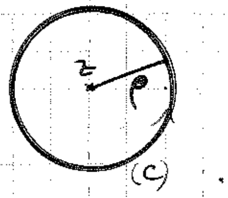
$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Nous voyons donc que nous pouvons avoir la valeur de la fonction u en un point z, pourvu que l'on connaisse les valeurs ~~autour d~~ de la fonction le long d'une courbe fermée entourant le point.

4/3/1935

<u>Remarque</u>

Il ne faut pas que l'on puisse choisir des valeurs arbitraires pour les $u(\xi)$ car rien ne nous dit que ces $u(\xi)$ sont les valeurs de u pour les points d'une même courbe fermée. Il faut donc avoir pour les $u(\xi)$ les valeurs correspondantes aux points de la courbe.



Soit un point z du plan. Considérons le cercle de centre z et de rayon ρ.

D'après l'intégrale de Cauchy:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{\rho e^{i\varphi}}\, i\rho e^{i\varphi} d\varphi$$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\oint_{(C)} u(\xi)\, d\varphi$$

C'est l'expression de la valeur de u au point z

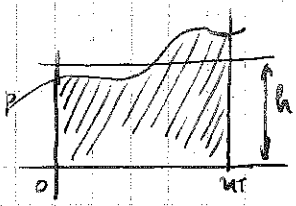
Or comme φ varie de 0 à 2π on peut écrire

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\xi)\, d\varphi$$

Si l'on suppose que $u(z) = p_z + i q_z$ on aura

$$p_z = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p\, d\varphi$$

$$q_z = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q\, d\varphi$$



Or $\int_0^{2\pi} p\, d\varphi$ représente une certaine aire. l'aire comprise entre la courbe p et l'axe. Or l'intervalle d'intégration est

2π

En divisant $\int_0^{2\pi} p\, d\varphi$ par 2π on obtient une certaine hauteur h qui est une hauteur moyenne. C'est-à-dire que pour ce p_z ordonnée la fonction n'est ni maximum ni minimum.

On peut faire un raisonnement identique pour

q_t et on obtient aussi que q_t est une valeur moyenne

On pourra donc dire puisque $u(t) \pm p_t + iq_t$ que

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\xi)\, d\varphi$$

est la valeur moyenne de la fonction u.

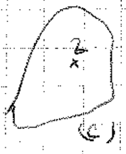
La valeur d'une fonction analytique au centre d'un cercle de rayon ρ est une valeur moyenne de la fonction.

Nous tirons de ce fait le résultat que : la fonction u ne peut être maximum ou minimum que sur la circonférence du cercle et non dans le cercle.

En effet pour chaque point à l'intérieur d'un du cercle on peut décrire autour un petit cercle intérieur au grand. Par rapport au centre de ce petit cercle c'est-à-dire au point considéré u sera une valeur moyenne et n'est donc pas ni un minimum ni un maximum. Tandis que sur la circonférence du cercle on ne peut plus tracer un cercle autour du point.

Cette conclusion est générale et elle s'applique à chaque courbe.

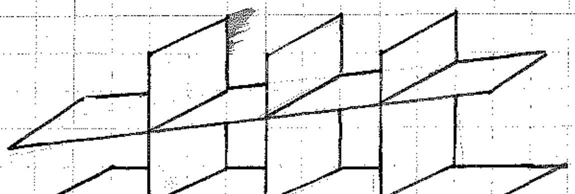
Pour une courbe (C) la valeur de u en un point intérieur à la courbe est une valeur moyenne. Tandis que le long de la courbe les valeurs de u sont maximum ou minimum.

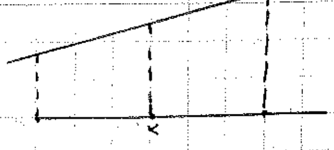


(il suffit de considérer des petits cercles autour de chaque point à l'intérieur de la courbe)

Dans les fonctions à variables réelles, il n'y a que

la fonction linéaire dans le plan et la fonction linéaire dans l'espace (la droite et le plan) qui les valeurs extrêmes étant connues donnent la valeur moyenne de la fonction.





On voit que les fonctions analytiques ont les propriétés des fonctions les plus simples de l'analyse réelle.

Théorème

Soit la fonction analytique $f(z, \alpha)$, α étant un paramètre. Considérons l'intégrale

$$\int_{(C)} f(z,\alpha)\, dz$$

qui est une fonction de α car c'est une intégrale bien définie. Nous énonçons le théorème suivant:

Pour dériver l'intégrale $\int_{(C)} f(z,\alpha)\, dz$ par rapport à α il suffit d'effectuer ~~l'intégrat~~ la dérivation sous le signe de l'intégrale:

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{(C)} f(z,\alpha)\, dz = \int_{(C)} \left[\frac{d}{d\alpha} f(z,\alpha)\right] dz$$

Ce théorème est une conséquence du théorème de Leibniz concernant la dérivation sous le signe de l'intégrale démontré dans l'analyse réelle. Car les fonctions analytiques peuvent être ~~consid~~ assimilées aux fonctions réelles:

$$f(z,\alpha) = g + i\varphi$$

g et φ étant des fonctions réelles.

La condition pour que le théorème soit valable est que la fonction $f(z,\alpha)$ doit être continue.

Application

Appliquons ce théorème à l'intégrale de Cauchy.

On a: $$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

Nous avons ici que z est le paramètre; d'où

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(C)} \frac{u(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^2}$$ (on dérive par rapport à z sous l'intégrale)

Mais $\frac{u(\xi)}{\xi - z}$ est dérivable par rapport à z. Par

suite on peut répéter l'opération su $\frac{du}{dz}$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{1.2}{2\pi i} \oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{(\xi - z)^3} \, d\xi$$

On peut continuer ainsi et on a:

$$\frac{d^n u}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, d\xi$$

Nous voyons le résultat étonnant que nous obtenons:

Nous avons supposé que $u(z)$ étant holomorphe. C'est-à-dire qu'elle avait au moins une dérivée de 1re ordre. Nous ~~voyons~~ n'avons rien dit au sujet des dérivées d'ordre supérieur à 1. Nous voyons que d'après les considérations ci-dessus, si $\frac{du}{dz}$ existe (si la fonction est holomorphe) toutes les dérivées d'ordre supérieur existent aussi.

Donc en résumé:

Une fonction analytique a une dérivée d'ordre quelconque, (la fonction étant holomorphe)

5/3/1935

On a donc trouvé que si la fonction

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{\xi - z} \, d\xi$$

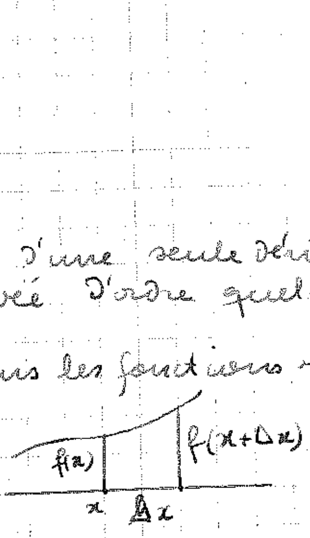
est holomorphe dans un certain domaine on a immédiatement:

$$u'(z) \;,\; u''(z) \ldots\ldots u^{(n)}(z) \ldots$$

$$u^{(n)} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, d\xi$$

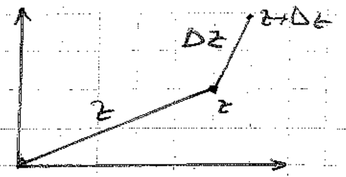
On se demande comment l'existence d'une seule dérivée entraîne-t-elle l'existence d'une dérivée d'ordre quelconque.

Une telle propriété n'a pas lieu dans les fonctions réelles. On se rappelle que la dérivé d'une fonction $f(x)$ était définie par:



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

On voit donc que l'existence de la dérivée en un point pour une fonction réelle implique la seule condition de l'existence de la limite ci-dessus.



Tandis que dans une fonction analytique on avait ~~que~~ bien que la dérivée en un point z était définie par

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(z+\Delta z) - u(z)}{\Delta z}$$

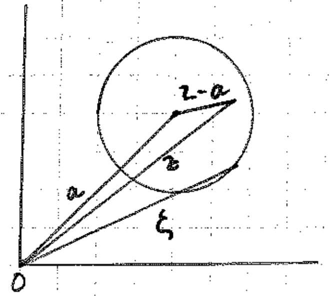
Seulement ceci ne suffisait pas. Nous avons dit que cette cette limite devait être la même dans toutes les directions.
On comprend maintenant que l'existence d'une dérivée en analyse complexe nécessite des conditions bien plus fortes que dans l'analyse réelle et en conséquence on aura en rapport la propriété de l'existence d'une dérivée d'ordre quelconque à partir de l'existence d'une dérivée de premier ordre.

Dans l'analyse réelle l'existence des dérivées d'ordre quelconque d'une fonction permet de parler d'un développement en série de la fonction suivant la formule de Taylor. Toutefois même si ~~ce développement~~ les dérivées existent il se peut que ce développement ne soit pas convergent. Tout dépend des conditions de convergence.

Par contre pour les fonctions analytiques on peut démontrer le théorème général suivant:

__Théorème__

Toute fonction analytique est développable en série pour tous les points du domaine où elle est holomorphe.



Considérons dans le plan z un point fixe a. Décrivons avec ce point comme centre une circonférence.

Considérons en outre un point z à l'intérieur de ce cercle dont la circonférence sera représentée en chaque point de son contour par la variable ξ.

Soit une fonction u(z) holomorphe à l'intérieur du cercle ci-dessus. Puisque cette fonction est holomorphe on aura:

$$u'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(c)} \frac{u(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

$$u''(z) = \frac{1.2}{2\pi i} \oint_{(c)} \frac{u(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi$$

$$u^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, d\xi)$$

Envisageons d'autre part la fonction: $\frac{1}{\xi - z}$

On peut écrire:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a - (z-a)} = \frac{1}{\xi - a} \; \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi - a}}$$

Comme le point z est à l'intérieur du cercle on aura que:

$$\left| \frac{z-a}{\xi - a} \right| < 1$$

car $\xi - a$ est le rayon du cercle et $z - a$ est la distance entre le point z et le point a.

D'autre part l'égalité:

$$\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n \qquad \text{pour les } x \text{ réels}$$

reste valable pour les x complexes car cette égalité n'est autre chose qu'une équation algébrique et on sait que les variables complexes satisfont aux équations algébriques

Si l'on suppose: $|x| < 1$ on voit que dans l'expression ci-dessus:

$$x^{n+1}$$

tend vers 0 pour n augmentant indéfiniment et on a finalement:

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + \dots$$

Série uniformément convergente.

Or on a vu que dans: $\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi - a}}$ on a

$$\left| \frac{z-a}{\xi - a} \right| < 1$$

on peut donc développer $\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi - a}}$ en série de puissances et on pourra écrire:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a}\left[1 + \frac{z-a}{\xi-a} + \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^2 + \cdots\cdots\right]$$

Multiplions les deux termes par : $u(\xi)\,d\xi$; on a :

$$\frac{u(\xi)d\xi}{\xi - z} = \frac{u(\xi)}{\xi-a}\left[1 + \frac{z-a}{\xi-a} + \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^2 + \cdots\right] d\zeta$$

On obtient une nouvelle série qui est aussi uniformément convergente car elle ne diffère de l'autre que du facteur $u(\xi)$ qui a une borne supérieure nécessairement puisque nous avons supposé que $u(z)$ était holomorphe dans un certain domaine. On a donc bien que la série est uniformément convergente et par suite on peut l'intégrer terme à terme et on aura après avoir multiplié de part et d'autre par $\frac{1}{2\pi i}$:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{\xi - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{\xi-a}\,d\xi + (z-a)\oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{(\xi-a)^2}d\xi + \cdots\right]$$

($z-a$ est cte par rapport à ξ ; il sort donc hors du signe d'intégrale)

Mais si on se rappelle que :

$$u'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{(\xi - z)^2}\,d\zeta$$

$$u''(z) = \frac{1.2.}{2\pi i}\oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{(\xi - z)^2}\,d\zeta$$

$$u^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\,d\zeta$$

on voit que :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{\xi - a}\,d\zeta = u(a)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{(\xi - a)^2}\,d\zeta = u'(a)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{(\xi - a)^3}\,d\zeta = \frac{u''(a)}{1.2} = \frac{u''(a)}{2!}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}\,d\zeta = \frac{u^{(n)}(a)}{n!}$$

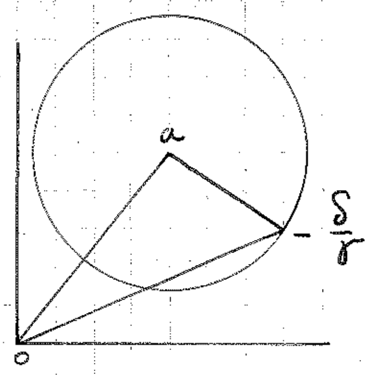
Il s'ensuit que l'on aura finalement :

$$u(z) = u(a) + (z-a)\,u'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!}u''(a) + \dots \frac{(z-a)^n\,u^{(n)}(a)}{n!} + \dots$$

C'est la série de Taylor pour une fonction à variable complexe et le théorème est démontré.

Nous avons posé comme condition que le point z fût à l'intérieur du cercle et que la fonction est holomorphe à l'intérieur et le long de ce cercle. Nous pourrons dire que :

la série de Taylor d'une fonction analytique est convergente pour toutes les valeurs de la variable à l'intérieur des cercles de centre a et dans lesquels ~~et~~ (~~le long desquels~~) la fonction est holomorphe



<u>Exemple</u>

Soit la fonction linéaire :

$$u(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

Nous voyons qu'elle n'est pas holomorphe au point :

$$z = -\frac{\delta}{\gamma}$$

Soit un point a du plan. On pourra écrire :

$$u(z) = u(a) + (z-a)\,u'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!}u''(a) + \dots$$

Cette série ne sera pas convergente pour toutes les valeurs de z. Elle ne le sera que pour les valeurs de z à l'intérieur du cercle de centre a et de rayon

$$\left| a + \frac{\delta}{\gamma} \right|$$

On voit donc qu'en général si on désigne par z_1 le point où la fonction (pas nécessairement linéaire) n'est pas holomorphe, le plus proche de a, ~~la série ci-dessus~~ (une fonction peut être non holomorphe en plusieurs points) la série ci-dessus est ~~holomorphe~~ convergente pour toutes les valeurs de z telles que

$$|z-a| < R$$

R étant le rayon du cercle de centre a ~~et de rayon~~ ; $R = |z_1 - a|$

Rappelons nous que nous avons montré qu'une série de puissances est une fonction analytique c'est-à-dire qu'elle possède une dérivée et que par suite elle est holomorphe, dans son cercle de convergence. (p. 127)

Nous avons montré maintenant que chaque fonction analytique est développable en série de puissances dans le domaine où elle est ~~uniforme~~ holomorphe.

6/3/1935

Nous pouvons écrire:

$$u(z) = u(a) + (z-a)\,u'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!}\,u''(a) + \dots$$

le second membre s'appelle : le développement en série de Taylor pour le point a de la fonction $u(z)$

Dans le cas particulier où $a = 0$ on obtient la série de Mac-Laurin

$$u(z) = u(0) + z\,u'(0) + \frac{z^2}{2!}\,u''(0) + \frac{z^3}{3!}\,u'''(0) + \dots$$

La série de Taylor et celle de Mac Laurin ne sont pas toujours convergentes.

Nous avons vu que la série de Taylor n'était convergente que sur le cercle de centre a et sur lequel se trouve au moins un point pour lequel la fonction n'est pas holomorphe. Ce point est le point singulier le plus proche de a.

Dans le cas particulier de la série de Mac Laurin, on a un cercle centré à l'origine.

Exemples

I _ Soit la fonction :

$$u(z) = \ln z$$

Cette fonction n'est pas holomorphe au point $z = 0$
Un développement donc en série de $\ln z$ serait convergent ~~excepté pour $z = 0$~~ pour tous les points à l'intérieur d'un cercle passant par l'origine.
Seulement il y a une difficulté. $\ln z$ n'est pas une fonction univoque, elle est multiforme.

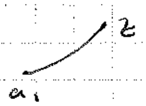
Aussi il faut tacher de trouver le moyen d'avoir des valeurs univoques pour $\ln z$.

A cet effet définissons $\ln z$ par:

$$\ln z = \int \frac{1}{z}\,dz$$

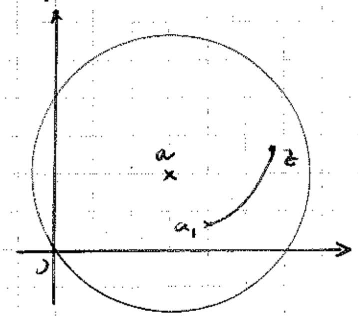
et pour un certain chemin entre a_1 et z,

$$\ln z = \int_{a_1}^{z} \frac{dt}{t}$$



Cette intégrale a une valeur bien définie pour chaque chemin entre a_1 et z.
On se dit donc que $\ln z$ conserve toujours sa multiplicité car l'intégrale a une valeur pour chaque chemin.

Mais soit le point a pour lequel on peut faire le développement. Ce développement est convergent pour tous les points à l'intérieur du cercle de centre a et de rayon $= \text{long.}\, a0$
Ce domaine est un domaine bien holomorphe pour la fonction $\ln z$. Mais dans ce cas si a_1 et z sont à l'intérieur du cercle, l'intégrale de a_1 à z ne dépend pas du chemin (voir p. 166 au bas) Donc on aura que



$$\ln z = \int_{a_1}^{z} \frac{dt}{t}$$

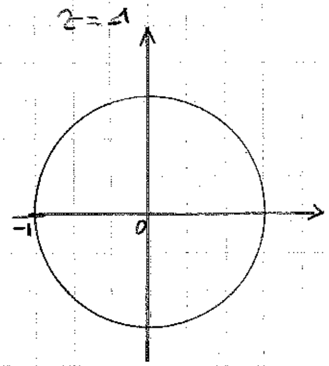
est bien définie univoquement pourvu que a_1 et z soient à l'intérieur du cercle.

Cherchons donc comme application le développement de

$$\ln(1+z)$$

Cette fonction n'est pas holomorphe au point $z=-1$
Nous appliquerons la série de MacLaurin en développant pour $z=0$

Le développement sera convergent pour tous les z intérieurs au cercle unitaire c'est-à-dire pour lesquels



$$|z| < 1$$

Nous disons donc: $\quad u = \ln(1+z) = \displaystyle\int^{z} \frac{dt}{1+t} \qquad (1)$

(la limite inférieure est sans importance, pourvu qu'elle soit à l'intérieur du cercle)
on pourra écrire d'après la formule de Mac-Laurin:

$$u = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

avec $\quad a_n = \dfrac{1}{n!} \dfrac{d^n u}{dz^n}(0)$

Mais en dérivant (1) (on peut dériver par la règle de Leibnitz):

$$u' = \frac{1}{1+z}$$

$$u'' = -\frac{1}{(1+z)^2} \; ; \quad u''' = \frac{2}{(1+z)^3} \; ; \quad u^{IV} = -\frac{2.3}{(1+z)^4} \dots$$

$$u^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{(1+z)^n} \qquad \text{et alors}$$

$$a_n = \frac{1}{n!}\,\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+0)^n} = (-1)^{n-1}\,\frac{1}{n} \quad ; \text{(on fait } z=0\text{)}$$

On a donc le développement :

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$$

convergent pour $|z| < 1$

C'est donc une autre définition du logarithme qui donne une valeur bien définie pour chaque z tel que $|z|<1$. Si on veut avoir l'infinité de valeurs du logarithme on doit ajouter $2n\pi i$ et alors :

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \dots \dots + 2n\pi i$$

II. – Série du binome.

Soit $u(z) = (1+z)^p$

si p est un entier positif ou négatif il n'y a pas de difficulté mais il faut aussi définir que $u(z)$ pour p fractionnaire, rationnel ou irrationnel, complexe ou réel.

On se rappelle que a^z était défini par :

$$a^z = e^{z \ln a}$$ (voir p. 145)

a et z étant des nombres quelconques. Par suite on pourra écrire :

$$u(z) = (1+z)^p = e^{p \ln(1+z)}$$

qui définit $u(z) = (1+z)^p$ pour toutes les valeurs de p réelles ou complexes.

Cette fonction n'est pas univoque ~~et~~ car $\ln(1+z)$ n'est pas univoque.

D'autre part on sait que $e^{v(z)}$ a toujours une dérivée pourvu que $v(z)$ ~~soit~~ ait une dérivée, par suite

$$\frac{du(z)}{dz} = u'(z) = e^{p\ln(1+z)}\,\frac{p}{1+z}$$

Cours d'Analyse

[II^e Année (suite)]

Prof. Von Mises

III^e Cahier

2^ème Année

Suite de la leçon du 6 Mars 1935

On a trouvé :

$$u'(z) = e^{p\ln(1+z)} \frac{p}{1+z}$$

Remplaçons $e^{p\ln(1+z)}$ par $(1+z)^p$; nous aurons :

$$u'(z) = p \frac{(1+z)^p}{1+z} = p(1+z)^{p-1}$$

Nous voyons donc la manière de calculer les dérivées de $u(z)$. Nous aurons facilement que :

$$u''(z) = p(p-1)(1+z)^{p-2}$$

$$- - - - - - - - - -$$

$$u^{(n)}(z) = p(p-1) \cdots (p-n+1)(1+z)^{p-n}$$

D'autre part en développant $(1+z)^p$ suivant la formule de Mac Laurin $(z=0)$ on aura :

$$(1+z)^p = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\cdots$$

Si l'on fait $z=0$ on a :

$$1^p = a_0$$

D'autre part : $a_n = \frac{1}{n!} u^n(0)$

alors $a_n = \frac{1}{n!} p(p-1) \cdots\cdots (p-n+1)(1+0)^{p-n}$

Mais $(1+z)^{p-n} = \frac{(1+z)^p}{(1+z)^n}$,

$$(1+0)^{p-n} = \frac{1^p}{1^n}$$

Mais n est un entier positif donc $1^n = 1$ et alors il reste $(1+0)^{p-n} = 1^p$

et on aura finalement le développement :

$$(1+z)^p = 1^p \left[1 + pz + \frac{p(p-1)}{2} z^2 + \frac{p(p-1)(p-2) z^3}{3!} + \cdots \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!} z^n \right.$$

Nous pouvons désigner par:

$$\binom{p}{1} = p = C_1^p$$

$$\binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2!} = C_2^p$$

$$\binom{p}{3} = \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} = C_3^p$$

$$\binom{p}{n} = \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!} = C_n^p$$

et on alors les formes:

$$(1+z)^p = 1^p \left[1 + \binom{p}{1} z + \binom{p}{2} z^2 + \binom{p}{3} z^3 + \cdots \right]$$

$$(1+z)^p = 1^p \left[1 + C_1^p z + C_2^p z^2 + C_3^p z^3 + \cdots \right]$$

valables pour $|z| < 1$

L'expression entre crochets est la formule bien connue du binôme.

Il reste le facteur 1^p qui représente la ~~racine~~ la puissance p de l'unité.

On peut écrire:

$$1^p = e^{p \ln 1} = e^{p\, 2n\pi i}$$

n pouvant prendre toutes les valeurs entières, positives ou négatives. On a donc une infinité de valeurs pour 1^p.

Seulement si ces valeurs peuvent ne pas être différentes l'une de l'autre: En effet si l'on suppose que p est fractionnaire $1/3$ par exemple:

$$1^p = 1^{1/3} = e^{1/3\, 2n\pi i} = e^{\frac{2n\pi i}{3}}$$

On voit que pour:

$$n = 0,\ 3,\ 6,\ 9 \ldots\ldots$$

on a les mêmes valeurs car elles ne diffèrent que d'un nombre entier de fois 2π:

$$e^{\frac{2.3\pi i}{3}} = e^{2\pi i} = e^{\frac{2.6\pi i}{3}} = e^{4\pi i} \ldots$$

Il en est de même pour:

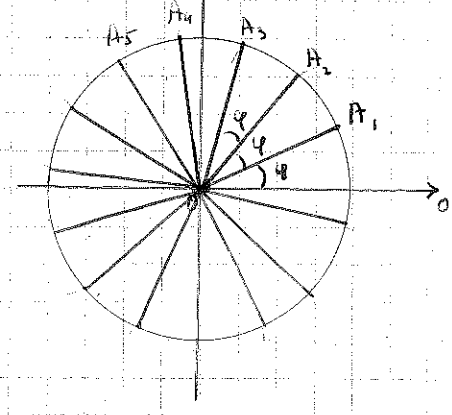
$$n = 1,\ 4,\ 7,\ 10 \ldots$$

et $n = 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14 \ldots$

et il n'y a pas d'autres valeurs pour n (toutes les valeurs

sont remplies). On a donc seulement 3 valeurs distinctes de $e^{\frac{2n\pi}{3}}$ et par suite seulement 3 valeurs distinctes de $(1+2i)^p$ ou $(1+2i)^{1/3}$

On peut représenter les valeurs de 1^p dans un graphique dans le cas de p réel.



On avait:

$$1^p = e^{p\,2n\pi i}$$

Posons $2p\pi = \varphi$; on a:

$$1^p = e^{n\varphi i}$$

Si p est connu, l'angle φ est connu. Dans le cercle unitaire portons l'angle φ. On obtient le point A_1 ; c'est la valeur de 1^p correspondant à $n=1$. Si on fait $n=2$, il suffit de porter 2φ à partir de l'axe des abscisses et ainsi de suite.

Si p est un nombre rationnel, on arrivera après un certain n aux mêmes valeurs ; ce qui montre que dans ce cas 1^p a un nombre limité de valeur.

Si p est irrationnel, 1^p prend un nombre infini de valeur.

L'étude plus détaillée des valeurs de 1^p est du ressort de l'algèbre et non de l'analyse.

7/3/1935

Cherchons néanmoins les valeurs de 1^p pour $p = \alpha+\beta i$. Dans ce cas on peut écrire:

$$1^p = e^{p\cdot 2\pi n i} = e^{\alpha 2n\pi i - \beta 2n\pi} = e^{\alpha 2n\pi i} \cdot e^{-\beta 2n\pi}$$

La valeur $e^{-\beta 2n\pi}$ est réelle et variant avec n.

Posons :

$$2\pi\alpha = \varphi \quad \text{et} \quad e^{-\beta 2\pi} = r$$

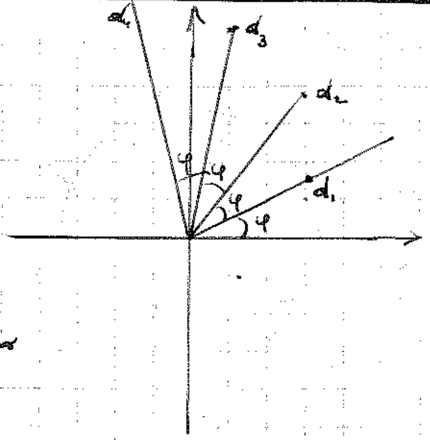
D'où:

$$1^p = r^n e^{ni\varphi}$$

On voit donc maintenant ce que représente 1^p, comme dans le cas de p on porte l'angle φ qui correspond à $n=1$ et on porte sur le côté la longueur r.

Dans ce cas on a:

$$1_1^p = re^{i\varphi}$$



On a aussi $\alpha_1 = re^{i\varphi}$ avec $|\alpha_1| = r$

De même $\alpha_2 = r^2 e^{2i\varphi}$ avec $|\alpha_2| = r^2$

et ainsi de suite.

On a ainsi un nombre infini de valeurs car $|\alpha|$ change de valeurs chaque fois.

L'un des cas les plus employés est celui pour lequel

$$\beta = 0$$

c'est-à-dire si p est un nombre réel. Si l'on suppose que p est de plus rationnel :

$$p = \frac{1}{m}$$ m étant un entier réel quelconque

on a:

$$1^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{1} = e^{2\pi i \frac{n}{m}}$$

Dans ce cas il y a seulement m valeurs distinctes pour $\sqrt[m]{1}$.

En effet si on donne à n toutes les valeurs de 0 à $m-1$ on a des valeurs distinctes (m valeurs) :

$$1,\ e^{\frac{2\pi i}{m}},\ e^{\frac{4\pi i}{m}},\ e^{\frac{6\pi i}{m}},\ e^{\frac{8\pi i}{m}} \dots\dots\dots e^{\frac{(m-1)2\pi i}{m}}$$

Mais si $n = m$, on a:

$$e^{2\pi i}$$

qui n'est autre chose que e^0 c'est-à-dire qui correspond à $n=0$

De même par exemple si $n = m+1$, on a le même:

$$e^{2\pi i \frac{m+1}{m}} = e^{2\pi i + \frac{2\pi i}{m}} = e^{\frac{2\pi i}{m}} \dots$$

On voit donc qu'il y a seulement m valeurs distinctes pour $1^{1/m}$.
On en conclue que:

$$(1+t)^{1/m} = 1^{1/m}\left[1 + C_1^{1/m} t + \dots\right]$$

a m valeurs distinctes.

Par exemple si :

$m = 2$, $\sqrt{1} = \pm 1$, et alors $(1+z)^{1/2}$ a deux valeurs distinctes

$m = 4$ $\sqrt[4]{1} = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ i \\ -i \end{cases}$ Donc $(1+z)^{1/4}$ a 4 valeurs distinctes

Théorème de Weierstrass (XIXe siècle)

Si l'on connaît la valeur d'une fonction analytique en un point et les valeurs de toutes ses dérivées en ce point, cette fonction est déterminée en tous les points où elle est holomorphe.

Nous avons donc comme données:

$$u(a)\ ;\ u'(a),\ u''(a)\ \dots\dots\ u^{(n)}(a)$$

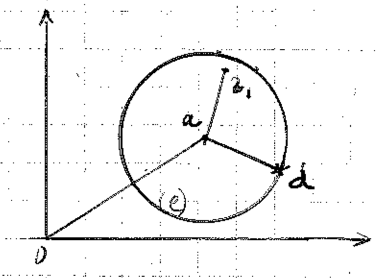
a étant le point considéré. Il s'agit de montrer que l'on peut trouver la valeur de $u(z)$ en n'importe quel point du plan, pourvu que ce point ne soit pas un point singulier.

Puisque $u(a)$, $u'(a)$ … $u^{(n)}(a)$ sont donnés, on connaît alors le développement taylorien de $u(z)$ suivant au point a :

$$u(z) = u(a) + u'(a)(z-a) + u''(a)\frac{(z-a)^2}{2} + \dots$$

Une telle fonction $u(z)$ ainsi définie n'a un sens que si son développement est convergent. Or d'après la conclusion de la page 183 du IIe cahier nous savons que : la série de Taylor d'une fonction analytique est convergente pour tous les points où la fonction est holomorphe.

Donc si nous supposons que la fonction n'est pas holomorphe au point d, la fonction est bien déterminée pour tous les points à l'intérieur du cercle C de centre a et de rayon



long ad (le point d est supposé être le point singulier le plus proche de a)

à l'intérieur duquel elle est holomorphe.

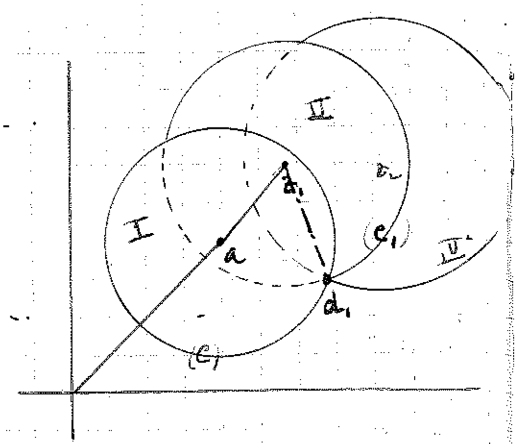
Mais il se peut qu'il y ait des points hors du cercle ci dessus pour lesquels la fonction est encore holomorphe. Comment trouverons nous alors la valeur de la fonction en ces points puisque la série n'est plus convergente en ces points?

On emploie alors le moyen suivant. Soit un point z_1 à l'intérieur du cercle (C). Pour ce point $u(z_1)$ est bien définie Par suite $u'(z_1)$, $u''(z_1)$, $u'''(z_1)$ … aussi

car si $u(z) = u(a) + (z-a)u'(a) + u''(a)\frac{(z-a)^2}{2}$ a un sens (si la série est convergente), nous pourrons avoir sa dérivée car une série de puissances possède une dérivée pour chaque point à l'intérieur de son cercle de convergence.

ainsi on pourra déterminer :

$$u(z_1),\ u'(z_1),\ u''(z_1),\ u'''(z_1)\ldots$$



Nous pouvons maintenant considérer le développement taylorien :

$$u(z) = u(z_1) + u'(z_1)(z-z_1) + u''(z_1)\frac{(z-z_1)^2}{2} + \ldots$$

qui donne maintenant la fonction $u(z)$.

Le cercle de convergence de ce nouveau développement est maintenant le cercle C_1 de centre z_1 et de longueur rayon :

long $z_1 d_1$

qui délimite maintenant un nouveau domaine II où la fonction $u(z)$ est bien définie. En ~~cont~~ recommençant le même raisonnement pour un point z_2 du cercle C_1, on obtient un III domaine et ainsi de suite pourvu que dans ces domaines on n'ait point de points singuliers.

(Cette méthode est dite *prolongement analytique*.

On a donc bien que si :

$$u(a),\ u'(a),\ u''(a)\ldots$$

sont données, $u(z)$ est déterminée en tous les points où elle est holomorphe.

Montrons qu'une telle propriété n'a lieu dans l'analyse réelle que si la fonction réelle considérée, est regardée comme partie réelle ~~de~~ d'une certaine fonction analytique.

En effet soit par exemple la fonction à variable réelle :

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

Nous voyons que cette fonction est déterminée pour toutes les valeurs de x (puisque le dénominateur ne s'annule jamais)

D'autre part construisons le développement de cette fonction au point $x=0$; il suffit d'appliquer la formule de Mac Laurin :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots$$

En calculant les dérivées de $f(x)$ et en y faisant $x=0$ on trouve le développement ci-dessus. Seulement on constate que ce développement n'est convergent que pour

$$|x| < 1$$

On voit que si l'on donnait :

$$f(0),\ f'(0),\ f''(0) \dots$$

on n'aurait pu déterminer $f(x)$ que seulement pour les valeurs de x :

$$-1 < x < 1$$

tandis que nous avons vu que $f(x)$ est déterminée pour toutes les valeurs de x. Ce qui montre que la connaissance de $f(0), f'(0) \dots$

ne suffit pas pour déterminer toutes les valeurs de $f(x)$.

Comment s'expliquer les résultats ci-dessus ?

~~On peut dans ce cas.~~ Considérons la fonction :

$$u(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

analytique en chaque point excepté pour $z^2 = i^2$

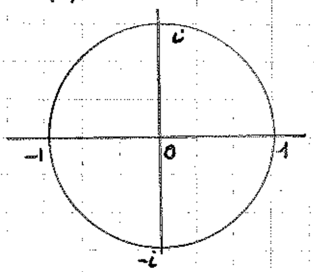
$$z = \pm i$$

Si l'on fait dans $u(z)$ $y=0$ (si $z = x+iy$, y est donc le coefficient de i dans z) on aura que dans ce cas on aura :

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

Ainsi $f(x)$ est le cas particulier de $u(z) = \frac{1}{z^2+1}$ pour $y=0$.

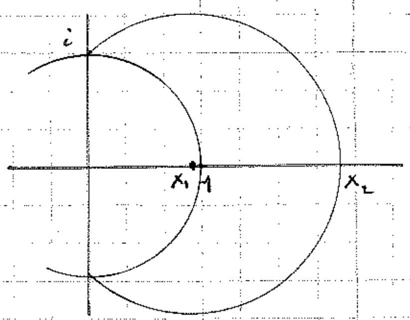
La fonction $u(z) = \frac{1}{z^2+1}$ a un développement pour $z=0$



qui ne converge que si $|z|<1$ car puisque $z = \pm i$ sont deux points singuliers le cercle de convergence est le cercle unitaire. Si $|z| < 1$, ceci entraîne que

$$|x| < 1$$

Mais la fonction $\frac{1}{z^2+1}$ est holomorphe aussi en dehors du cercle ~~[illegible]~~ unitaire.



On peut obtenir de nouveaux domaines par prolongement analytique.

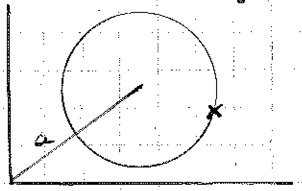
Le premier domaine le meilleur (le plus grand) est obtenu par le cercle ~~de centr~~ ayant pour centre un point sur l'axe des x près de $x=1$ (Il n'est pas bien de prendre $x=1$ car sur le cercle la convergence est indeterminée) et passant par i

La fonction $\frac{1}{z^2+1}$ est bien déterminée dans ce domaine et la fonction $\frac{1}{x^2+1}$ l'est aussi pour les points de l'axe réel compris entre x_2 et 1. On peut aussi en prolongeant les domaines, avoir tous les points de l'axe réel.

11/3/1935

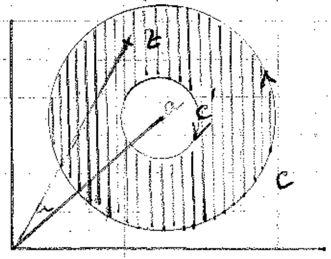
Jusqu'à présent nous n'avons considéré que les fonctions holomorphes. Voyons maintenant comment se comportent les fonctions analytiques pour les points singuliers

Pour chaque point régulier chaque fonction analytique a un développement suivant la série de Taylor. et ce développement a un cercle de convergence dont le centre est le point donné et le rayon la distance du point au point non ~~holom~~ singulier le plus proche



Supposons que le point a ne soit pas un point régulier. C'est-à-dire que pour ce point la fonction considérée $u(z)$ ne soit peut être pas holomorphe.

Entourons ce point par un cercle quelconque C'. Soit un autre cercle C centré aussi au point a. On obtient une couronne pour le domaine compris entre les deux cercles. Supposons que la fonction $u(z)$ considérée soit holomorphe à l'intérieur de cette couronne.



On peut immédiatement appliquer l'intégrale de Cauchy; avec les sens de parcours convenables (voir II^e cahier, p. 154 et 174) On obtient :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

l'intégrale étant étendue aux cercles C et C' de sorte que :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{\xi - z}\,d\xi + \frac{1}{2\pi i}\oint_{(C')} \frac{u(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$$

(sens opposés)

Mais
$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a - (z-a)} = \frac{1}{\xi - a}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}}$$

Comme pour le cercle C on a évidemment

$$\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| < 1$$

car le point z est choisi à l'intérieur de ce cercle on peut développer

$$\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}}$$

suivant la série géométrique. On obtient une série uniformément convergente.

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a}\left[1 + \frac{z-a}{\xi-a} + \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^2 + \dots\right]$$

qui donne toujours une série uniformément convergente même si on l'a multipliée par $u(\xi)$ qui est indépendant de z. On peut donc l'intégrer terme à terme et on obtient un certain développement

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = a_0 + a_1(z-a) + \dots$$

(voir II^e Cahier, p. 182)

Quand à la seconde intégrale :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{(C')} \frac{u(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$$

on pourrait faire les mêmes considérations. Seulement ici le rapport :

$$\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| > 1$$

car z est à l'extérieur du cercle C'. On n'obtient

Donc pas un bon résultat. Opérons donc autrement.
On peut écrire toujours:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a - (z-a)}$$

Mettons maintenant $-(z-a)$ en facteur au dénominateur au lieu de $\xi - a$ comme dans la 1ère intégrale. Nous avons:

$$\frac{1}{\xi - z} = -\frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - a}{z-a}}$$

Comme cette fois nous avons évidemment

$$\left|\frac{\xi - a}{z-a}\right| < 1$$

car z est à l'extérieur du cercle c', on peut développer $\frac{1}{1-\frac{\xi-a}{z-a}}$ suivant la série géométrique

$$\frac{1}{\xi - z} = -\frac{1}{(z-a)}\left[1 + \frac{\xi-a}{z-a} + \frac{(\xi-a)^2}{(z-a)^2} + \dots \frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^n} + \dots\right]$$

qui est uniformément convergente quelque soit ξ. On pourra donc multiplier avec $\frac{1}{2\pi i} u(\xi)\, d\xi$ et intégrer terme à terme le long du cercle c'.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{(c')} \frac{u(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{(c')} \frac{u(\xi)}{(z-a)}\left[1 + \frac{\xi-a}{z-a} + \dots \frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^n} + \dots\right] d\xi$$

Enlevons le signe moins en changeant le sens de parcours et on aura:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{(c')} \frac{u(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{2\pi i}\oint u(\xi)\, d\xi + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \frac{1}{2\pi i}\int_{(c')} u(\xi)(\xi-a)^n\, d\xi + \dots$$

$$= \frac{b_1}{z-a} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \dots$$

$b_1, b_2 \dots$ étant certains coefficients que nous indiquerons.

On obtient donc en définitive pour $u(z)$:

$$u(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots$$
$$+ ~~b_0~~ + b_1(z-a)^{-1} + b_2(z-a)^{-2} + \dots$$

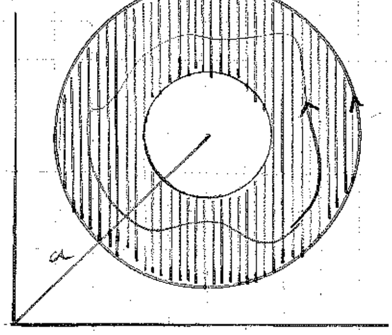
avec

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{u(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{u(\xi)}{~~(\xi - a)~~} (\xi - a)^{n-1} d\xi$$

Remarque

On n'a pas mis les courbes le long desquelles les deux intégrales sont étendues car chacune d'elle a la même valeur pour toutes les courbes fermées entourant le point a et contenues dans la couronne formée par C et C' car dans ce domaine la fonction à intégrer est holomorphe. En effet :



1° $\frac{u(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}$ est holomorphe dans ce domaine car $u(\xi)$ est holomorphe et dans ce domaine on n'a jamais $\xi = a$

2° $u(\xi)(\xi - a)^{n-1}$ n'a pas de raison d'être holomorphe.

Il résulte de la remarque ci-dessus que a_n et b_n ont des valeurs bien déterminées.

Or si l'on fait $n = 0$ on a :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{u(\xi)}{\xi - a} d\xi$$

qui n'est autre chose que $u(a)$ car

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{u(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

De même la dérivation nous fournit que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{u(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} = \frac{1}{n!} u^{(n)}(a)$$

Nous voyons donc le résultat obtenu :

a priori puisque nous avons supposé le point a pas régulier, nous ne savons rien sur $u(a)$ et les valeurs des dérivées de $u(z)$ au point a.

Nous voyons maintenant que $u(a)$ et $u^{(n)}(a)$ sont bien définis par les intégrales ci dessus et maintenant on peut donc dire que $u(t)$ possède un développement

$$u(t) = a_0 + a_1 (t-a) + \dots a_n (t-a)^n + \dots + b_1 + b_2 (t-a)^{-1} + \dots b_n (t-a)^{-n}$$

On appelle un tel développement une *série de Laurent*

Nous avons l'énoncé ci-dessus:

Une fonction analytique est développable en un point en série de Laurent si elle est au moins holomorphe dans une couronne autour de a.

Nous disons au moins car le théorème s'applique aussi bien quand le point en question est point régulier.

Dans ce cas tous les b_n s'annulent car:

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint u(\xi)(\xi - a)^{n-1} d\xi$$

et l'intégrale est étendue le long d'une courbe tracée dans un domaine où la fonction $u(\xi)(\xi-a)^{n-1}$ est holomorphe. D'après le théorème de Cauchy cette intégrale s'annule et ainsi les b_n s'annulent

(on ne peut dire la même chose pour les a_n car dans $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{u(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$, $\frac{u(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}$ n'est pas holomorphe dans le domaine entier car si $\xi = a$ on a une indétermination.

Donc dans le cas particulier où a est un point régulier la série de Laurent se réduit à la série de Taylor.

Par suite on voit que la 2e partie de la série de Laurent $[b_1 (t-a)^{-1} + \dots]$ provient du fait que a est un point singulier.

Ces considérations nous permettrons de classer les points singuliers et les fonctions analytiques

Un point important sera retenu dans le classement: que dans la 2e partie de la série de Laurent il se peut qu'il y ait un nombre limité de valeurs de $b_1, b_2 \dots$ qui soient différentes de 0

Définition : On appelle pôle de n^e ordre un point singulier pour lequel, dans le développement de Laurent, les coefficients b_n sont en nombre limité, égal à n.
On suppose par suite que:

$$b_{n+1} = b_{n+2} = b_{n+3} = \cdots = 0$$

On peut définir aussi le pôle de cette manière :

On dit que la fonction $u(z)$ a un pôle d'ordre n au point $z=a$ si la fonction :

$$(z-a)^n u(z)$$

donne un développement de Taylor avec la supposition que

$$(z-a)^m u(z)$$

reste irrégulière, c'est-à-dire admette pour $z=a$ une série de Laurent si :

$$m < n$$

En effet :

$$(z-a)^n u(z) = a_0(z-a)^n + a_1(z-a)^{n+1} + \dots a_n(z-a)^{2n} + \dots$$
$$+ b_1(z-a)^{n-1} + b_2(z-a)^{n-2} + \dots \quad b_n + R$$

Le reste R contient des expressions fractionnaires des puissances de $z-a$. Si l'on suppose que $(z-a)^n u(z)$ admette un développement Taylorien, on admet alors que $(z-a)^n u(z)$ est un polynôme et par suite le reste R s'annule et les b_n sont bien en nombre limité.

D'autre part si l'on multiplie $u(z)$ par $(z-a)^m$ avec $m<n$ on n'obtient plus pour développement un développement de Taylor car il y aura des termes fractionnaires de puissances $m-n$, $m-n-1 \dots$

Le fait que $(z-a)^n u(z)$ admet un développement de Taylor montre que cette fonction est holomorphe et le fait que pour $m<n$

$$(z-a)^m u(z)$$

reste irrégulière montre que n est la plus petite puissance pour laquelle le produit $(z-a)^n u(z)$ est une fonction holomorphe au point considéré.

Comme d'autre part le degré du pole est n, on voit que la puissance de $z-a$ la plus petite pour que le produit $(z-a)^n u(z)$ soit holomorphe au point $z=a$ donne l'ordre du pôle.

Exemple

Soit la fonction linéaire:

$$u(t) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} = \frac{1}{\gamma}\,\frac{\alpha z+\beta}{z+\frac{\delta}{\gamma}}$$

Il suffit de multiplier $u(z)$ par $z+\frac{\delta}{\gamma}$ pour avoir une expression holomorphe:

$$u(z)\left(z+\frac{\delta}{\gamma}\right) = \frac{1}{\gamma}(\alpha z+\beta)$$

On voit que la fonction linéaire admet un pôle de 1er ordre

12/5/1935

On peut classer les fonctions analytiques de la manière suivante

1°/ Les fonctions analytiques holomorphes dans tout le plan z quel'on appelle aussi fonctions entières.

Ex: e^z

2°/ Les fonctions qui admettent des pôles isolés et qui sont holomorphe dans tout domaine ne contenant pas ces points. Ces fonctions sont dites: mérophormes

(Dans leur développement en série de Laurent, les b_n sont en nombre limité)

Exemple: la fonction linéaire: $u(z) = \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$

3°/ Les fonctions admettant des singularités essentielles

Exemple: $u(z) = \ln z$

Cette fonction n'est pas régulière au point $z=0$.
On a vu (II^a cahier p. 171) que $\ln z$ a toujours la même valeur $2\pi i$ le long d'un cercle entourant le point 0 (le cercle étant parcouru une fois)

La fonction $\ln z$ pouvant prendre un nombre infini de valeurs, il n'est pas possible de trouver un n tel que

$$(z-a)^n u(z) = z^n \ln z \qquad (a=0)$$

et le point 0 ne peut être un pôle. On dit que le point 0 est un point critique ou essentiellement singulier

---

Considérons la fonction e^z.

Elle devient infinie quand la variable z augmente indéfiniment. Il en est de même de tout polynôme.

$$a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n$$

Il y a d'autre part des fonctions qui tendent vers des valeurs finies quand la variable tend vers l'infini :

$$u(z) = \frac{1}{a_0 + z} + a_1$$

Voici à propos de ces deux genres de fonctions le théorème suivant.

Théorème de Liouville

Une fonction sans points singuliers est une constante ou elle devient infinie avec la variable augmentant indéfiniment

ou :

Une fonction qui n'est pas une constante possède des points singuliers si elle tend vers une valeur finie quand la variable augmente indéfiniment ; elle est holomorphe partout dans le cas contraire

Ce théorème fait ressortir l'incompatibilité de deux faits :

1°/ Le fait qu'une fonction soit bornée quand la variable tend vers l'infini

2°/ Le fait que cette fonction n'admette pas de points singuliers

Démonstration

Soit une fonction $u(z)$ que nous supposons holomorphe dans tout le plan.
Soit un point z du plan. Décrivons autour de ce

pour un cercle de rayon ρ. L'intégrale de Cauchy appliquée au point z considéré donne:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Puisque u(z) est holomorphe on aura:

$$u'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

D'autre part comme $|\xi - z| = \rho$ on peut écrire:

$$\xi - z = \rho e^{i\varphi}$$

et alors:

$$u'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{\xi - z} \cdot \frac{1}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{\xi - z} \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi} d\xi$$

Comme ρ est constant on peut écrire:

$$u'(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\rho} \oint_{(C)} \frac{u(\xi)}{\xi - z} d\xi \cdot e^{-i\varphi}$$

Le facteur $e^{-i\varphi}$ indique une rotation et sa valeur absolue est l'unité.

Supposons que:

$|u(z)| < M$ c'est-à-dire que u(z) soit borné

pour toutes les valeurs de z.

D'autre part dans l'expression de $u'(z)$ si l'on s'abstient du facteur $e^{-i\varphi}$, la quantité à intégrer n'est autre que u(z). En prenant les valeurs absolues, le facteur $e^{-i\varphi}$ disparaît car

$$|e^{-i\varphi}| = 1$$

Il reste à part le facteur $\frac{1}{\rho}$ l'expression de $|u(z)|$

De sorte que l'on a si $|u(z)| < M$:

$$|u'(z)| < \frac{M}{\rho}$$

Exprimons maintenant le fait que $u(t)$ est holomorphe partout; cette propriété entraîne que:

le rayon ρ peut augmenter indéfiniment. $u(t)$ sera toujours holomorphe.

Si ρ augmente indéfiniment $\frac{M}{\rho} \to 0$ et par suite $u'(t)$ aussi.

On a immédiatement qu'alors $u(t)$ est une constante et la 1ère partie du théorème est démontrée.

Si l'on suppose que $u(t)$ ne soit pas une constante on a essentiellement

$$|u'(t)| \neq 0$$

ce qui entraîne que ρ a une valeur nécessairement finie et par suite que $u(t)$ n'est pas holomorphe partout (puisque ρ est fini)

Il y a donc contradiction avec ~~la suppos~~ l'hypothèse que $u(t)$ était holomorphe partout. Cela provient du fait que l'on suppose $u(t)$ limité.

On a donc comme résultat que $u(t)$ n'est pas borné et la seconde partie du théorème est démontrée.

Il ressort aussi de la démonstration que si

$u(t)$ est borné, la fonction $u(t)$ (qui est supposée ne pas être une constante) admet des points singuliers

<u>Conséquence</u>

Une des conséquences les plus importantes de ce théorème est la démonstration du théorème de D'Alembert : Toute équation algébrique admet une racine (réelle ou complexe)

En effet soit le polynôme.

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

Montrons qu'il existe un $t = t_1$ tel que

$$f(t_1) = 0$$

A cet effet considérons la fonction $u(t) = \frac{1}{f(t)}$

$f(z)$ n'est pas une constante. Par suite $u(z)$ ne l'est pas non plus.

Si z tend vers l'infini $f(z)$ tend vers l'infini aussi et par suite

$$u(z) = \frac{1}{f(z)}$$

tend vers 0 ~~que~~ dans ce cas. C'est donc une valeur bornée.

D'après le théorème de Liouville, puisque quand $z \to \infty$ $u(z)$ est borné, nécessairement $u(z)$ n'est pas holomorphe dans tout le plan. Il faut donc que $u(z)$ ait au moins un point singulier ce qui n'a lieu que si:

$$f(z) = 0$$

Donc $f(z)$ s'annule au moins une fois, c'est-à-dire qu'il y a au moins une valeur de z qui annule ce polynome.

On peut généraliser. Soit z_1 la valeur de z qui annule $f(z)$:

$$f(z_1) = 0$$

La division $\dfrac{f(z)}{z - z_1}$ s'effectue sans reste et

$$\frac{f}{z - z_1} = b_0 + b_1 z + \dots + b_{n-1} z^{n-1}$$

est un polynome. On peut appliquer le même raisonnement à ce polynome. Il a lui aussi une racine et ainsi de suite. On peut répéter l'opération n fois. On a donc n racines

14/3/1935

Soit le polynome :

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$ de degré n. Comme

conséquence du théorème de d'Alembert on peut écrire:

$$f(z) = (-1)^n a_n (a - z)^\alpha (b - z)^\beta \dots$$

$a, b \dots$ étant les racines du polynome et $\alpha, \beta, \gamma \dots$ leur degré de multiplicité, avec la condition:

$$\alpha + \beta + \gamma \dots = n$$

Soit une fonction $u(z)$. Supposons que l'on puisse mettre $u(z)$ sous la forme:

$$u(z) = (z-a)^n \left[a_n + P \right]$$

a_n est une quantité différente de 0 et P est un polynome des puissances de $z-a$ supérieures à n ou une série de puissances

On dit alors que: $u(z)$ possède au point a un zero d'ordre n.

Voyons quelle analogie il y a entre les zéro et les pôles d'une fonction.

Décomposons $u(z)$ en série de Laurent en écrivant les $z-a$ par odre des puissances croissantes, on aura:

$$u(z) = \dots\dots b_3(z-a)^{-3} + b_2(z-a)^{-2} + b_1(z-a)^{-1} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots\dots$$

Examinons les pôles et les zéro de $u(z)$.

1°/ Supposons que le point a soit un zéro d'ordre n. D'après la définition du zéro d'une fonction, cette supposition entraine le fait que le développement de $u(z)$ ne commence qu'avec $(z-a)^n$ car:

$$u(z) = (z-a)^n \left[a_n + P \right]$$

P étant un polynome de degré supérieur à n, ou une série de puissances supérieures à n.

2°/ Si a est un pôle de degré m, d'après la définition du pôle dans le développement en série de Laurent de la fonction les b_m sont en nombre limité et le développement ne commence qu'avec $(z-a)^{-m}$ et ainsi:

$$u(z) = (z-a)^{-m} \left[b_m + P \right] \qquad \text{avec} \quad b_m \neq 0$$

P étant un ~~polygo~~ polynome ou une série de puissances supérieures ~~bm vales~~ à m.

On voit donc que le pôle et le zéro ont le même mode d'expression.

On utilisera justement ce mode d'expression pour le calcul de m et n à l'aide d'une integrale simple.

Rappelons nous que dans la série de Laurent les coefficients b_m étaient définis par la relation:

$$b_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(C)} \frac{u(\xi)\, d\xi}{(\xi - a)^{m-1}} \qquad \text{(v. p. 11)}$$

(C) était un cercle enfermant le point a considéré. Ces coefficients n'existent que si le point a est un point singulier.

Considérons le plus simple de ces coefficients :

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(C)} u(\xi)\, d\xi$$

Ce coefficient a une grande importance comme on le verra plus tard. Il a reçu un nom spécial. On l'appelle :

le résidu de la fonction $u(t)$ le long du cercle C.

Si à l'intérieur du cercle C il n'y a pas de point singulier, le résidu de $u(t)$ est 0.

Théorème :

Le résidu d'une fonction le long d'une courbe fermée C contenant un certain nombre de points singuliers est égal à la somme des résidus de la même fonction le long d'une courbe enfermant chaque point singulier, tracée à l'intérieur de C.

En effet supposons pour fixer les idées que C contient 4 points singuliers.

Entourons ces points par de petites courbes fermées.

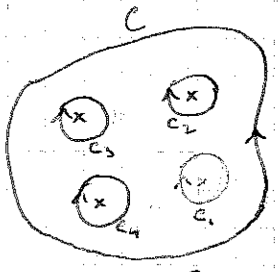


fig. I

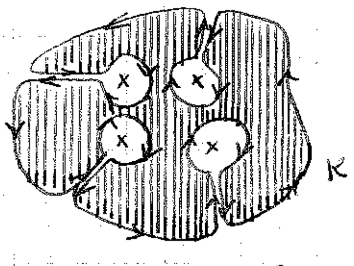


fig. II

Evidemment l'intégrale de Cauchy étendue le long de C et de toutes les courbes ne sera pas nulle étant donné la présence des points singuliers.

Toutefois nous pouvons considérer dans la figure II le domaine hachuré et la courbe enfermant le domaine. D'après la disposition de la figure il est facile de voir que le domaine ne contient pas de points singuliers. Alors le résidu le long de cette courbe sera nulle :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{(K)} u(\xi)\, d\xi = 0$$

Nous pouvons rendre aussi étroites que possibles les coupures ; alors l'intégrale curviligne $\oint u(\xi)\, d\xi$ sera appliquée deux fois le long de ces lignes en sens contraire.

On pourra donc écrire :

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{(K)} u(\zeta)d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)} u(\zeta)d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\oint_{(C_1)} u(\zeta)d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\oint_{(C_2)} \cdots = 0$$

Les courbes $C_1, C_2 \ldots$ sont parcourues en sens inverse de celui de C.

Si l'on change les sens de parcours on a en définitive.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)} u(\zeta)d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{(C_1)} u(\zeta)d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\oint_{(C_2)} u(\zeta)d\zeta + \cdots$$

ce qui démontre le théorème.

Soit le résidu :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)} \frac{u'(\zeta)}{u(\zeta)} d\zeta$$

de la fonction $u(\zeta)$ le long d'une courbe fermée C contenant un point a.

Comme : $\frac{u'(\zeta)}{u(\zeta)} d\zeta$ est la différentielle de $\ln u(\zeta)$ on pourra écrire :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)} \frac{u'(\zeta)}{u(\zeta)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint d[\ln u(\zeta)]$$

Aussi on appelle ce résidu, le résidu logarithmique de la fonction u le long de C.

Supposons que le point a soit un zéro de la fonction $u(\zeta)$. Dans ce cas :

$$\frac{u'(\zeta)}{u(\zeta)}$$

n'est pas régulière au point a et le résidu le long de C n'est pas nul.

Ecrivons maintenant le point a est un zero de $u(z)$. On aurait dans ce cas :

$$u(z) = (z-a)^n [a_n + P] \qquad a_n \neq 0$$

P étant un polynôme de puissances de $(z-a)$ supérieures à n, ou une série des mêmes puissances.

En prenant les logarithmes de part et d'autre, on a :

$$\ln u(z) = n \ln(z-a) + \ln[a_n + P]$$

Enfin en dérivant on obtient :

$$\frac{d[\ln u(z)]}{dz} = n\frac{1}{z-a} + \frac{P'}{a_n + P}$$

P′ étant la dérivée de P

Le résidu cherché est :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)} d[\ln u(\xi)] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)} n\frac{d\xi}{\xi - a} + \frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)} \frac{P'}{a_n + P}d\xi$$

au point a $\frac{P'}{a_n+P}$ est régulière car

en ce point P s'annule, a_n est différent de 0 et le polynome P′ n'est pas essentiellement susceptible d'être irrégulier en un point quelconque puisque c'est un polynome.

Puisque $\frac{P'}{a_n+P}$ est régulière au point a, son résidu le long de C s'annule :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)} \frac{P'}{a_n+P}d\xi = 0$$

et il reste pour le résidu logarithmique l'expression

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)} n\frac{d\xi}{\xi-a} \qquad (1)$$

Rappelons nous l'intégrale de Cauchy :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)} \frac{u(\xi)\,d\xi}{\xi - a}$$

Il est facile de constater en comparant cette intégrale avec l'intégrale (1) que cette dernière n'est qu'un cas particulier de l'intégrale de Cauchy. tout simplement on a dans (1) :

$$u(\xi) = n = c^{te}$$

et par suite on aura immédiatement par

application :

$$n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(C)} n \frac{d\xi}{\xi - a}$$

Donc le résidu logarithmique autour d'un zéro de la fonction $u(\xi)$ est égal à un nombre ~~po~~ entier positif n qui indique l'ordre de ce zéro

Supposons maintenant que a soit un pôle de la fonction $u(z)$. On pourra écrire :

$$u(z) = (z-a)^{-m} [b_m + P] \qquad b_m \neq 0$$

P s'annule au point $z = a$ et c'est un polynome.

On a :

$$\ln u(z) = -m \ln(z-a) + \ln [b_m + P]$$

et conséquemment :

$$d [\ln u(z)] = \frac{-m}{z-a} + \frac{P'}{b_m + P}$$

P' étant la dérivée de P

En faisant les mêmes considérations sur $\frac{P'}{b_m+P}$ qui est régulière au point a, on a pour résidu logarithmique de $u(\xi)$:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint -m \frac{d\xi}{\xi - a}$$

qui n'est autre chose d'après l'intégrale de Cauchy que $-m$.

Donc le résidu logarithmique autour d'un pôle de la fonction $u(z)$ est un nombre entier négatif indiquant l'ordre du pôle.

Comme application de ce théorème, considérons le résidu logarithmique d'une fonction $u(z)$ le long d'une courbe fermée c contenant un ~~nomb~~ des pôles et des zéros de la fonction $u(z)$.

Ce résidu égalera la somme des résidus autour des zéro et des pôles (p. 20) et d'après les considérations

ci-dessus on aura pour le résidu

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)} \frac{u'(\zeta)}{u(\zeta)}\, d\zeta = n_1 + n_2 + \cdots - (m_1 + m_2 + \cdots)$$

$n_1, n_2, n_3, \ldots$ étant l'ordre des zéros
$m_1, m_2, m_3, \ldots$ étant l'ordre des pôles
on a donc montré le théorème :

<u>Théorème</u>. – Le résidu logarithmique d'une fonction $u(z)$ le long d'une courbe fermée C est égal à la différence des zéros et des pôles de $u(z)$ contenus ~~dans~~ à l'intérieur de la courbe, les zéros et les pôles étant pris avec leur ordre.

<u>Conséquence</u> :

Le résidu logarithmique ne change pas si on déplace la ~~fonction~~ courbe de manière à maintenir le même les ~~noms~~ zéros et les pôles.

Si dans ce déplacement on rencontre de nouveaux zéros ou pôles, le résidu ne diffère du précédent que par une constante.

<u>Application</u> :

Soit un polynome $f(t)$. ~~Ch~~ Supposons que l'on veuille chercher les racines de $f(t)$ ~~à l~~ dans un certain intervalle.

Une racine de $f(t)$ est un zéro de $f(t)$.

Il suffit donc de calculer le résidu logarithmique de $f(t)$ le long d'une courbe enfermant ~~le domaine~~ l'intervalle considéré. Toutefois il n'est pas nécessaire de calculer le résidu exactement. Il suffit d'en avoir les limites ou une valeur approximative. Par exemple si on trouve que dans l'intervalle considéré le résidu est approximativement inférieur à 1, on peut dire qu'il n'y a pas de racine dans l'intervalle. Si par exemple on trouve que le résidu est compris entre 1 et 2, on est sûr qu'il y a une racine dans l'intervalle considéré.

19/3/1935

On a vu que le résidu d'une fonction u est :

$$R = \frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)} u(\zeta)\, d\zeta = R_1 + R_2 + R_3 \cdots$$

$R_1, R_2, R_3 \ldots$ étant le résidu de la fonction u le long des quelques

courbes entourant les points singuliers de u à l'intérieur de C.

D'autre part on a vu aussi que le résidu logarithmique de u est.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(C)} \frac{u'(\zeta)}{u(\zeta)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(C)} d(\ln u) = n - m$$

n indique le nombre de zéros, chaque zéro étant pris avec son ~~degré~~ ordre.

m indique le nombre de pôle de u dans C, chaque pôle étant pris avec son ordre.

Si la courbe n'admet pas de points singuliers dans le domaine qu'elle enferme, R sera nul. tandis que, $\mathcal{L}$ n'est peut être pas nul.

De l'égalité $\mathcal{L} = n - m$ on peut déduire que:

un pôle de la fonction u est un zéro de $\frac{1}{u}$ et réciproquement

En effet soit un point a. Supposons qu'il soit un zéro ~~pôle~~ de u. Entourons le point par un cercle aussi petit qu'il soit nécessaire pour que le cercle ne contienne d'autre point singulier que le point a. Le résidu logarithmique de u le long de ce cercle sera ici:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi i} \oint d(\ln u) = n$$

D'autre part si l'on pose:

$$v(z) = \frac{1}{u(z)}$$

$$\ln[v(z)] = -\ln[u(z)]$$

$$d\ln v = -d\ln u$$

et le résidu logarithmique de v devient:

$$\mathcal{L}' = -n$$

ce qui montre que le zéro de u est un pôle de v.
D'ailleurs il fa est facile de montrer ceci directement.
En effet si a est un zéro d'ordre n on peut écrire

$$u(z) = (z-a)^{n} \left[a_n + P\right]$$

D'autre part:

$$v(z) = (z-a)^{-n} \left[\quad \right]$$

Le crochet indique une quantité non nulle pour $z = a$

Cette expression montre que a est un pôle de v de degré n.

Résidu du point infini

Nous introduirons maintenant une nouvelle définition.

Le sens de parcours considéré jusqu'à présent était tel que le domaine se trouvait à gauche de la courbe

Supposons que nous parcourions le cercle en sens inverse l'intégrale aura une nouvelle valeur en signe contraire de la valeur précédente.

Mais si l'on considère maintenant le domaine extérieur au cercle, le cercle est parcouru de manière à avoir ce domaine à gauche et ainsi on peut dire que dans le cas où C est parcouru de cette manière, le résidu est le résidu du domaine extérieur. On dit que ce résidu est le résidu du point infini, si le cercle C est assez grand.

Par assez grand il faut entendre ceci:

Supposons que la fonction u contienne un certain nombre de points singuliers. Il y aura un cercle de rayon suffisant qui enferme tous ces points. C'est justement ainsi que l'on dit que le cercle est suffisamment grand.

Donc par un cercle assez grand on entend un cercle qui contienne tous les points singuliers de la fonction.

<u>Remarque</u>

On suppose ces points singuliers distincts car il y a des fonctions à variables complexes qui ont une infinité de points singuliers, même des domaines entiers n'étant formés que de point singuliers.

Par analogie avec les autres résidus on dit que

si le résidu défini ci-dessus (le contour parcouru en sens négatif) est nul, que le point à l'infini est un point régulier.

Si ce résidu est différent de zéro, on dit que le point à l'infini est un point singulier

Ce résidu est:

$$R = \frac{1}{2\pi i} \oint^{\text{sens négatif}} u(\zeta)\, d\zeta$$

Si l'on fait tendre ζ vers l'infini, et si alors $u(\zeta)$ tend aussi vers l'infini, le résidu R sera différent de 0 sûrement. On a donc le résultat que:
une fonction qui devient infinie avec la variable augmentant indéfiniment possède un point singulier à l'infini.

Rappelons nous maintenant le théorème de Liouville (p.15) qui dit que toute fonction, n'étant pas une constante, qui tend vers l'infini si la variable augmente indéfiniment, est holomorphe partout.

Avec les considérations précédentes on peut généraliser et dire que:

Toute fonction qui n'est pas une constante possède toujours un point singulier (ordinaire ou à l'infini)

Cas particulier

Supposons que la fonction soit un polynome:

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots\ a_n t^n$$

Cette fonction est régulière dans tout le plan sauf à l'infini où elle possède un point singulier car elle augmente indéfiniment si la variable t tend vers l'infini
Calculons justement le résidu logarithmique pour ce point singulier à l'infini.
On a:

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots\ n a_n z^{n-1}$$

et alors:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi i} \oint^{\text{sens négatif}} \frac{n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + a_1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots\ a_0}\, dz$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{n a_n z^{n-1}\left(1 + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \cdots \frac{1}{n} \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{z^{n-1}}\right)}{a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \cdots \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n}\right)}\, dz$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{n}{z} \frac{1 + \frac{n-1}{n}\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{z} + \cdots \frac{1}{n}\frac{a_1}{a_n}\frac{1}{z^{n-1}}}{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{z} \cdots (\cdot \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{z^n}} dz$$

(Ici au lieu de ξ il y a z)

L'intégrale sera étendue à un cercle très grand. Aussi en posant:

$$z = \rho e^{i\varphi}$$

il est facile de voir que si ρ augmente indéfiniment

$$\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2} \cdots \longrightarrow 0$$

et alors on aura que:

$$\mathcal{L} \to \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{n\, dz}{z}$$

Cette valeur n'est autre chose que $-n$ car d'après l'intégrale de Cauchy, si l'on suppose que $u(\xi) = n$ et si l'on développe autour de $\xi =$ $a = 0$ il vient

$$n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{n\, dz}{z} \qquad \left[u(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{u(\xi)\, d\xi}{\xi - a} \right]$$

et puisque dans le résidu ci-dessus l'intégrale est parcourue en sens inverse on aura que:

$$\mathcal{L} \to -n$$

Donc le point à l'infini est un point singulier d'ordre n.

On peut profiter de ceci pour démontrer plus élégamment le théorème de D'Alembert.

<u>Théorème de d'Alembert</u>

Toute équation algébrique possède une racine réelle ou complexe.

En effet on peut écrire en faisant attention aux sens de parcours, pour le polynome $f(z)$, en tenant compte du point à l'infini

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f'}{f} dz = -n = \frac{1}{2\pi i} \oint d(\ln f) = \frac{1}{2\pi i} \oint d\left(\ln \frac{1}{f}\right)$$

Donc $-n$ est la somme des pôles de $\frac{1}{f}$. Or un pôle de $1/f$ est un zéro de f. Donc f a des zéros dont la somme est n, chaque zéro étant pris avec son ordre. Donc f possède n racines.

Application des résidus pour le calcul des intégrales définies

Soit à calculer l'intégrale définie :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{g(x)} dx$$

avec:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \qquad a_0 \neq 0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots b_0 \qquad b_0 \neq 0$$

deux polynômes en x, x étant une variable réelle

L'intégrale ci-dessus n'existe que si :

$$g(x) \neq 0$$

x étant supposé réel.

De plus examinons ce que devient la fraction $\frac{f(x)}{g(x)}$ quand x tend vers l'infini; la fraction est infinie si le degré de $g(x)$ est inférieur à celui de $f(x)$. Elle a une limite finie si les degrés sont égaux. L'intégrale est infinie dans les deux cas. Si le degré de $f(x)$ est inférieur à celui de $g(x)$ la fraction est infiniment petite. Si le degré de $f(x)$ est égal à celui de $g(x)$ moins une unité on aura une intégrale de la forme:

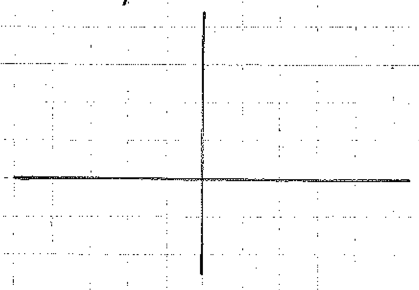
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x}$$

qui n'a pas de sens non plus. Donc l'intégrale I ci-dessus n'a un sens que si la différence des degrés est au moins égale à deux :

$$m \geqslant n+2$$

Pour évaluer cette intégrale considérons le plan complexe

Considérons le domaine limité par l'une partie de l'axe des réel et un demi-cercle de centre O et de rayon ρ.



Soit C tout le contour: le demi-cercle K et la partie $-x\,x$ de l'axe des x

Considérons le résidu de la fonction

$$u(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

le long de C. Nous savons que ce résidu est égal à la somme des résidus autour des points singuliers à l'intérieur du domaine ci-dessus. Ce résidu est:

$$R = \frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)} u(z)\,dz = R_1 + R_2 + R_3 \ldots$$

Mais on peut écrire:

$$\oint_{(C)} u(z)\,dz = \int_{-x}^{x} u(x)\,dx + \oint_{(K)} u(z)\,dz$$

car C se compose de $-x\,x$ et du demi-cercle K

D'autre part on peut écrire.

$$u(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots b_0} = \frac{a_n z^n}{b_m z^m}\,\frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{z} + \frac{a_{n-2}}{a_n}\frac{1}{z^2} + \cdots \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{z^n}}{1 + \frac{b_{m-1}}{b_m}\frac{1}{z} + \frac{b_{m-2}}{b_m}\frac{1}{z^2} + \cdots \frac{b_0}{b_m}\frac{1}{z^m}}$$

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_n}{b_m} z^{n-m}\,\frac{1 + \cdots + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{z^n}}{1 + \cdots + \frac{b_0}{b_m}\frac{1}{z^m}}$$

Nous savons la condition:

$$m \geq n+2 \qquad \text{ou} \qquad -m+n \leq -2$$

Supposons maintenant que nous augmentions le rayon ρ du cercle. z tend vers l'infini: La fraction

$$\frac{1 + \cdots \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{z^n}}{1 + \cdots \frac{b_0}{b_m}\frac{1}{z^m}} \quad \text{tend vers } 1$$

et il vient que $\dfrac{f(z)}{g(z)} \leq \dfrac{a_n}{b_m}\dfrac{1}{z^2}$ puisque $m-n \leq 2$

et en prenant les valeurs absolues:

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| \leq \left|\frac{a_n}{b_m}\right| \frac{1}{\rho^2} \qquad \text{car} \qquad |z| = \rho$$

Considérons maintenant l'intégrale :

$$\oint_{(\Gamma)} u(t)\,dt$$

La longueur du parcours de l'intégrale est :

$$\pi\rho$$

(puisque c'est un demi cercle).

Ainsi pour les z très grands, la fonction à intégrer est proportionnelle à $\frac{1}{\rho^2}$. Le chemin à intégrer est proportionnel à $\pi\rho$; l'intégrale est donc proportionnelle à $\frac{\rho}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}$. De sorte que si ρ augmente indéfiniment l'intégrale tend vers 0.

et alors on aura que :

$$I = \oint_{(C)} u(t)\,dt$$

(C) étant un demi cercle très grand. Or on sait que le résidu le long de C est égal à la somme des résidus des points singuliers à l'intérieur de C. On a donc que résultat que l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ est égale à $2\pi i$ fois la somme des résidus de la fonction $u(z)$ autour des points singuliers ~~le~~ de $\frac{f(z)}{g(z)}$ contenus dans le ½ plan supérieur c'est-à-dire les zéros de $g(z)$ dans le demi-plan supérieur.

Cherchons donc les résidus autour des zéros de $g(t)$ contenus dans le demi-plan supérieur.

Nous supposerons que les zéros de $g(z)$ sont des zéros simples. De sorte que l'on peut écrire si z_1 est un zéro :

$$g(z) = (z - z_1)\, g_1(z)$$

$g_1(t)$ est un polynome de degré inférieur à $g(t)$ et $g_1(z_1) \neq 0$

Le résidu autour d'un cercle autour du point z_1 est :

$$R_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(\Gamma)} \frac{f(z)}{(z-z_1)g_1(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(\Gamma)} \frac{f(z)}{g_1(z)} \frac{dz}{z-z_1}$$

nous pourons diminuer le cercle Γ autant que nous voulons z tend vers z_1. La fraction $\frac{f(z)}{g_1(z)}$ est continue au point $z = z_1$ car $g_1(z_1) \neq 0$. Elle tend alors vers la limite:

$$\frac{f(z_1)}{g_1(z_1)}$$

qui est une constante. Il reste maintenant

$$\oint_{(\Gamma)} \frac{dz}{z-z_1}$$

Mais on sait que $\oint_{(\Gamma)} \frac{dz}{z-z_1} = 2\pi i$ (v. II^e cah. p. 173

alors:

$$R_1 \to \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \; \frac{f(z_1)}{g_1(z_1)} = \frac{f(z_1)}{g_1(z_1)}$$

On a donc trouvé le résultat:

$$J = 2\pi i \left[\frac{f(z_1)}{g_1(z_1)} + \frac{f(z_2)}{g_1(z_2)} + \dots\dots \right]$$

C'est bien mais c'est toujours assez pénible à calculer car il faut trouver

$$g_1(z_1), \quad g_2(z_2) \dots$$

ce qui n'est pas assez élégant.

Aussi faisons les considérations suivantes:

$$g(z) = g_1(z)\,(z - z_1)$$

Dérivons de part et d'autre:

$$g'(z) = g_1(z) + (z - z_1)\, g_1'(z)$$

En faisant $z = z_1$, il vient:

$$g'(z_1) = g_1(z_1)$$

Donc on aura :

$$I = 2\pi i \left[\frac{f(z_1)}{g'(z_1)} + \frac{f(z_2)}{g'(z_2)} + \cdots \right.$$

avec $g(z_r) = 0$ (z_r racine simple de g)

et $y_r > 0$ (z_r est situé dans le ½ plan supérieur et non sur l'axe des x)

Exemples

I.— Calculer: $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Ici on a: $f(x) = 1$; $f(z) = 1$

$g(x) = 1 + x^2$; $g(z) = 1 + z^2$

Il faut trouver les zéros de $g(z)$. Avant ceci il faut voir si la condition concernant les degrés est remplie. En effet:

$f(x)$ est de degré 0
$g(x)$ " " " 2

La différence des degrés est 2. L'intégrale aura donc un sens car de plus $g(x)$ ne possède pas de racines réelles.

Trouvons donc les zéros de $g(z) = 1+z^2$ contenus dans le ½ plan supérieur. Il n'y a que le point

$$z = +i$$

qui soit un tel zéro [l'autre point est $-i$, ne convient pas)

D'autre part:

$$g'(z) = 2z$$

alors: $\frac{f(i)}{g'(i)} = \frac{1}{2i}$

et on aura:

$$I = 2\pi i \left[\frac{1}{2i} \right] = \pi$$

On a donc trouvé la solution sans avoir recours au calcul de l'intégrale indéfinie.

II.— Calculer: $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^m - 1}{x^{n} - 1}\, dx$

m et n sont des entiers positifs avec la condition $m \geq n+1$ de manière que $2n - 2m \geq 2$

En général on ne connaît pas l'intégrale indéfinie de

$$\frac{x^{m-1}}{x^{2m}-1}$$

Calculons ceci par notre méthode. Soit donc:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^{m-1}}{x^{2m}-1}$$

On pourrait dire que $g(x)$ possède une racine réelle: 1 mais on voit que pour $x=1$ $f(x)$ aussi est 0 et on peut justement effectuer la division en haut et bas par $x-1$ et on obtiendrait deux polynomes.

Ici donc: $g(t) = z^{2m}-1$

Les racines de $g(z)$ sont:

$$z^{2m} = 1$$

$$z = \sqrt[m]{1} = e^{\frac{2\pi i N}{2m}} = e^{\frac{\pi i N}{m}}$$

avec $N = 1, 2, 3 \ldots$

(on n'a pas pris pour N la valeur 0 car cette valeur donnerait la racine réelle 1)

On calcule $f(z_1)$, $f(z_2)$ ...... ; $g'(z_1)$, $g'(z_2)$ ....

et on obtient avec les rapports:

$$\frac{f(z_1)}{g'(z_1)}, \quad \frac{f(z_2)}{g'(z_2)} \ldots$$

une série géométrique dont on peut calculer la somme très facilement. On a aussi trouvé la valeur de l'intégrale cherchée.

Ici s'arrête pour le moment l'étude des fonctions analytiques. Nous commencerons un nouveau chapitre.

21-3-1935

Equations aux dérivées partielles

Généralités

Soit $z = z(x, y)$ une fonction de deux variables indépendantes x et y. Considérons les dérivées partielles:

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \dots$$

Une relation entre ces dérivées, la fonction z, x, y de la forme:

$$F\left(z, x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \dots\right) = 0$$

est une *équation aux dérivées partielles*.

L'ordre de cette équation est indiqué par l'ordre de la plus haute dérivée.

Naturellement l'équa la fonction z peut être une fonction d'un nombre quelconque de variables.

~~Rappelons nous que~~

Supposons maintenant que nous considérions une équation de 1er ordre:

$$F\left(z, x, y\ \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

Rappelons nous l'équation différence ordinaire

$$f(x, y, y') = 0$$

cette équation admettait une infinité de solutions qui étaient ~~des~~ une famille de courbes. L'intégrale ne dépendait que d'une constante arbitraire:

$$y = F(x, C)$$

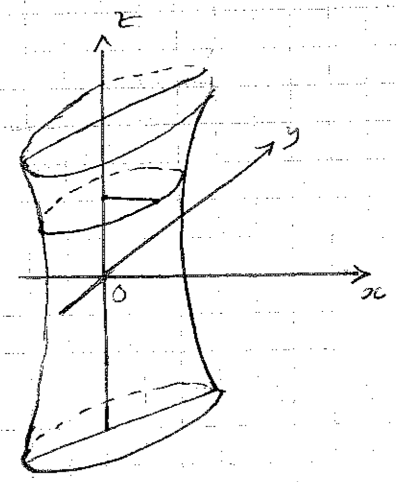
Il n'en est pas de même dans une équation aux dérivées partielles de premier ordre.

La fonction $z = z(x,y)$ ~~est une~~ représente une surface

La solution de l'équation

$$F\left(z, x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

donnera une famille de surfaces. Pour avoir une idée de ce que nous entendons par ceci donnons l'exemple suivant.



Considérons une surface de révolution ayant pour axe, l'axe des z.
Une surface de révolution est définie par le fait que :
toute circonférence centrée sur Oz et passant par un point de la surface, est située tout entière sur la surface.
(le point est à la même hauteur que le centre)
En se basant sur cette définition on peut indiquer comme équation d'une surface de révolution la forme :

$$z = \varphi(x^2 + y^2)$$

x^2+y^2 étant considéré comme une variable unique c'est-à-dire qu'en elle même la fonction φ est fonction d'une variable seulement.

En effet pour ~~un z~~ si ~~cons~~ $x^2+y^2 = cte$ c'est-à-dire pour un cercle on a que $z = cte$ ce qui montre que le cercle est parallèle à Oxy.
Ainsi l'une telle équation représente bien une surface de révolution.

Posons maintenant :

$$x^2+y^2 = r^2$$

On obtient $\quad z = \varphi(r^2)$

que l'on peut écrire : $\quad z = \Psi(r)$. C'est une fonction de la seule variable r. Voyons sa signification. Considérons le plan zOx. Dans ce plan :

$$y = 0$$

On en déduit :

$$~~z~~\ x = r = r$$

L'équation $z = \Psi(r)$ représente donc le méridien de la surface de révolution dans le plan zOx

Réciproquement supposons que nous nous donnions

$$z = \psi(r) \quad \text{équation du méridien}$$

on en déduit : $z = \varphi(r^2)$ et

$$z = \varphi(x^2+y^2)$$

c'est-à-dire l'équation d'une surface de révolution.

On voit donc que : l'équation d'une surface de révolution dépend d'une fonction arbitraire d'une seule variable : φ ou ψ. On dit que les surfaces de révolutions constituent une famille de surfaces.

Montrons que cette famille de surfaces satisfait à une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre.

En effet on peut écrire :

$$z = \varphi(r^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dr^2} \cdot \frac{\partial (r^2)}{\partial x} = \varphi' \cdot 2x \quad \text{car } r^2 = x^2+y^2$$

De même :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d\varphi}{dr^2} \cdot \frac{\partial (r^2)}{\partial y} = \varphi' \cdot 2y$$

En multipliant $\frac{\partial z}{\partial x}$ par y et $\frac{\partial z}{\partial y}$ par x et en retranchant membre à membre on obtient :

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(2xy - 2xy) = 0$$

On a donc l'équation :

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Toute surface de révolution satisfait à cette équation.

Conclusion ; cet exemple met en évidence le fait suivant :

la solution générale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre dépend d'une **fonction arbitraire**

On pourrait le voir dans beaucoup d'autres exemples que nous ne citerons pas.

Équations du premier ordre

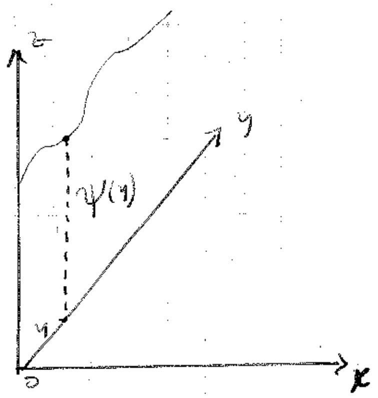
Par abréviation nous posons:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

Soit donc l'équation du 1er ordre:

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

Nous savons que la solution générale dépend d'une fonction arbitraire. Il faudra donc poser certaines conditions pour résoudre le problème.



Problème de Cauchy

On sait que la solution de l'équation

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

est une surface.

Supposons que l'on donne une ~~l'on donne une~~ fonction

$$\psi(y)$$

telle que $\psi(y) = z(0, y)$

C'est-à-dire que dans le plan zoy; la fonction

$$z = \psi(y)$$

représente l'intersection de la surface z avec le plan en question. En d'autres termes on suppose donnée l'intersection de la surface z avec le plan zoy.

Pour résoudre le problème supposons que l'équation

$$F(\ldots) = 0$$

soit soluble par rapport à p; de sorte que l'on puisse écrire:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = f(x, y, z, q)$$

(Nous disons maintenant que si f et ψ sont des fonctions dérivables à dérivées de n'importe quel ordre et si z est développable en série de Taylor par rapport à x, l'équation $F(\ldots) = 0$ possède une solution

c'est ici le problème de Cauchy. Supposons donc les conditions remplies et tâchons de trouver la solution.

Le fait que z est développable en série de Taylor peut s'exprimer dans le cas particulier de la série de Mac-Laurin par:

$$z(x,y) = z(0,y) + x\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{x=0} + \frac{x^2}{2!}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]_{x=0} + \cdots$$

Montrons que l'on peut calculer les coefficients $z(0,y), \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{x=0}, \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]_{x=0} \ldots$ sans connaître z.

En effet tout d'abord on a par donnée que:

$$z(0,y) = \psi(y)$$

D'autre part on a supposé que:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = f(x, y, z, q)$$

Calculons $\frac{\partial z}{\partial x}$ au point $x=0$.

Le fait que $x=0$ indique que nous nous trouvons dans le plan yOz. Nous savons que dans ce plan:

$$z = \psi(y)$$

Il reste à trouver $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ pour $x=0$. Si $x=0$ $\frac{\partial z}{\partial y}$ se réduit à $\frac{d\psi(y)}{dy} = \psi'(y)$ car on a déjà vu que

$$z(0,y) = \psi(y)$$

On a donc le résultat que:

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{x=0} = f[0, y, \psi(y), \psi'(y)] = g(y)$$

Calculons:

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]_{x=0}$$

On a que: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$. Mais dans

$$f(x, y, z, q)$$

z et q sont fonctions de x. Par suite:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}$$ d'après les règles de dérivation.

Soit :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot p + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

Maintenant calculons $\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]_{x=0}$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ est une fonction de x, y, z, q. On connaît les valeurs de x, y, z, q pour $x=0$:

$$z_{x=0} = \psi(y)$$

$$q_{x=0} = \psi'(y)$$

Donc $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x=0}$ est connu.

De même $\left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]_{x=0}$ et $\left[\frac{\partial f}{\partial q}\right]_{x=0}$ sont connus aussi.

Nous avons trouvé $p_{x=0}$ qui n'est autre chose que $g_1(y)$

Il reste d'inconnu $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. Mais on a l'expression de p :

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y, z, q)$$

Il suffit donc de dériver cette expression par rapport à y et d'y remplacer x, y, z, q par les valeurs $0, y, \psi(y), \psi'(y)$. Ainsi on a trouvé aussi $\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]_{x=0}$ qui sera une fonction $g_2(y)$ car $[z]_{x=0}$, $[q]_{x=0}$ $[p]_{x=0}$ ne sont que fonction de y.

De cette manière on peut calculer les valeurs de toutes les dérivées pour $x=0$: il suffit de calculer les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \ldots \frac{\partial^n x}{\partial x^n} \ldots$ et d'y faire toujours :

$$x=0, \quad y = y, \quad z_{x=0} = \psi(y) \; . \; q_{x=0} = \psi'(y)$$

et les autres valeurs que l'on calcule à chaque pas : $g_1(y)$, $g_2(y) \ldots$

On a donc trouvé le développement de $z(x,y)$ en fonction de x et y et par suite on a trouvé $z(x,y)$.

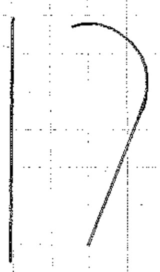
25/3/1935

La méthode exposée dans la leçon précédente est plutôt d'un intérêt théorique que d'un intérêt pratique pour deux raisons:

1°/ Elle demande un développement en série, ce qui n'est pas un fait général dans l'analyse réelle et peu de fonctions satisfont à cette condition pour de grands intervalles de variation de la variable

2°/ Elle demande l'existence des dérivées de tout ordre de f et φ ce qui n'est pas nécessaire dans plusieurs cas.

Par exemple, nous savons que les surfaces de révolution satisfont à une certaine équation de 1er ordre aux dérivées partielles. La solution générale dépend d'une fonction arbitraire. Mais il n'est pas nécessaire que cette fonction admette des dérivées d'ordre quelconque. En effet on peut considérer la surface de révolution formée par une courbe et une droite tangente à cette courbe, tournant autour d'un axe. Cette surface ~~exact~~ existe quoique le long de la droite toutes les dérivées d'ordre supérieur à 1 sont nulles.



Ainsi les deux réserves faites dans le problème de Cauchy rendent peu pratique cette méthode.

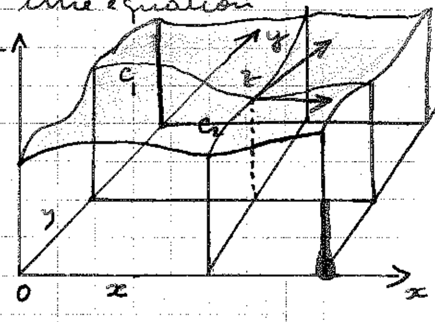
Il faut donc en trouver d'autres. A cet effet cherchons la

Signification géométrique d'une équation aux dérivées partielles de premier ordre.

Rappelons nous que dans le cas d'une seule variable indépendante une équation de premier ordre définissant un champ de directions (voir II^e cahier p. 3) dans le plan et intégrer l'équation c'était grouper ces pour directions et les réunir par une courbe à laquelle ces directions étaient tangentes.

Voyons maintenant ce que représente une équation

$$p = f(x, y, z, q)$$



L'équation $z = z(x, y)$ est la représente une surface. Supposons dessinée cette surface et prenons en un point z. Ce point z étant déterminé, pour ce point x et y le sont aussi. On voit donc que l'équation

$$p = f(x, y, z, q)$$

donne pour chaque x, y, z une relation entre p et q.

Faisons passer par le point z un plan parallèle à xOz et un autre ~~paral~~ parallèle à yOz. Ces deux plans coupent la surface suivant deux courbes se coupant en z: c_1 et c_2

Il est facile de voir que :

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}$$

est la pente de la tangente à la courbe C_1 au point z. En effet : $\frac{\partial z}{\partial x}$ suppose y constant c'est-à-dire justement dans le plan de C_1.

De même $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ donne la pente de la tangente à la courbe C_2 au point z.

Les deux tangentes ci-dessus constituent un plan qui est le plan tangent à la surface au point z. Donc p et q suffisent à définir ce plan. Considérons la normale au point z à la surface. On sait que ses cosinus directeurs sont proportionnels à :

$$p \quad q \quad \text{et} \ -1$$

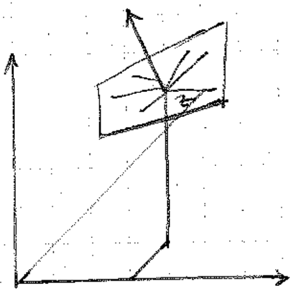
$$\frac{\cos\alpha}{p} = \frac{\cos\beta}{q} = \frac{\cos\gamma}{-1}$$

On peut donc à partir de p et q déf. avoir la direction de la normale au point z considéré.

Tout ceci suppose que la surface est connue. Mais nous savons qu'il y a une infinité de surfaces satisfaisant à l'équation et passant par z. Par suite on a une infinité de normales passant par z mais c'est une infinité du 2e degré ∞^2 car une direction peut être donnée par un vecteur unitaire ($\cos\alpha$ et $\cos\beta$ par exemple, $\cos\gamma$ est lié de $\cos^2\gamma + \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$)

D'autre part l'équation différentielle fournit une relation entre p et q. Elle donne que justement la normale dépend d'un seul paramètre p ou q. On en déduit qu'au lieu d'une double infinité de directions on n'en a qu'une simple infinité. C'est donc que toutes ces directions constituent une surface conique de sommet z. Ceci a lieu pour chaque z de l'espace.

<u>Cas particulier</u>



Supposons que la surface conique dont on a parlé ci-dessus se réduise à un plan. Toutes les normales aux surfaces passant par z seront coplanaires. Les plans tangents passant par z seront perpendiculaires au plan ci-dessus et tous ces plans se couperont suivant la normale au point z au plan des normales aux surfaces.

Il s'ensuit que cette droite sera commune à tous les plans tangents.

Si donc nous considérons un point de cette droite situé près de z, ce point sera commun à tous les

plans tangents. Ce fait s'exprime analytiquement comme suit:

Soit dz la distance du point z au point considéré. D'après les règles de dérivation:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

ou avec les notations admises:

$$dz = p\,dx + q\,dy \qquad (1)$$

Cette relation doit être remplie quelque soient dx et dy, p et q qui définissent justement le plan tangent.

D'autre part le fait que la surface conique considérée plus haut se réduit à un plan entraîne que la relation entre p et q est une relation linéaire, de sorte que l'on peut écrire :

$$Ap + Bq = C \qquad (2)$$

A, B, C étant des fonctions quelconques de x, y, z.

Cette relation est remplie quelque soient p et q

Pour que les équations (1) et (2) soient remplies quelque soient p et q, il suffit donc qu'elles soient identiques, ce qui entraîne que:

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{C}$$

Les coefficients A, B, C sont connus. On voit donc que l'on a trouvé pour chaque z la direction dx, dy, dz pour tous les p et tous les q.

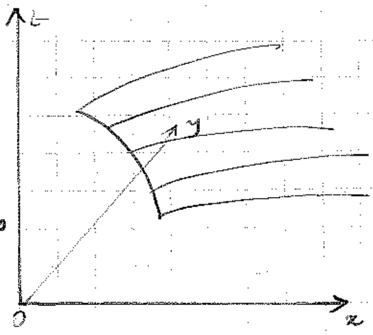
Le point $z+dz$ étant infiniment près du point z, on peut dire que le point $z+dz$ aussi se trouve sur la surface. On a donc trouvé une direction $dx\,dy, dz$ telle que 2 pts infiniment près ~~que pour chaque~~ point de cette direction, sont ~~est~~ sur la surface.

Si maintenant on part du point $z+dz$, on aura un nouveau plan des normales, une nouvelle droite perpendiculaire à ce plan et aussi encore un point de la surface. En continuant de cette manière on obtient une courbe qui est sûrement située sur la surface.

Ainsi à partir de chaque point de l'espace une courbe située sûrement sur une des surfaces intégrales.

Si donc on se donne une courbe de l'espace, on peut pour chaque point de cette courbe, trouver une

courbe qui sera située sur la surface. L'ensemble de ces courbes donnera la surface intégrale passant par la courbe de l'espace que l'on s'est donnée.



Ces courbes s'appellent les courbes caractéristiques de l'équation, ou plus simplement les caractéristiques de l'équation.

L'équation :

$$Ap+Bq=C$$

est dite une équation linéaire. Ceci n'est pas tout à fait exact si on se rappelle que dans le cas d'une seule variable une équation linéaire supposait une relation linéaire entre y' et y tandis qu'ici il n'en est rien pour z.

Aussi il conviendrait mieux d'appeler une telle équation une équation planaire car le cône des normales se réduit à un plan. On l'appelle tout de même linéaire. Mais elle n'a pas les propriétés des équations linéaires à une seule variable : par exemple, le fait que la somme de deux solutions particulières était une nouvelle solution etc. (voir II Cah. p. 57.)

26/3/1935

Nous avons vu que la solution de l'équation

$$Ap+Bq=C$$

se ramenait à la solution de :

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B}=\frac{dz}{C}$$

soit le système d'équations à une variable

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{B}{A} \\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{C}{A} \end{cases}$$

Le problème donc se ramène à la solution d'un système d'équations à une variable. (v. II Cah. p. 32)

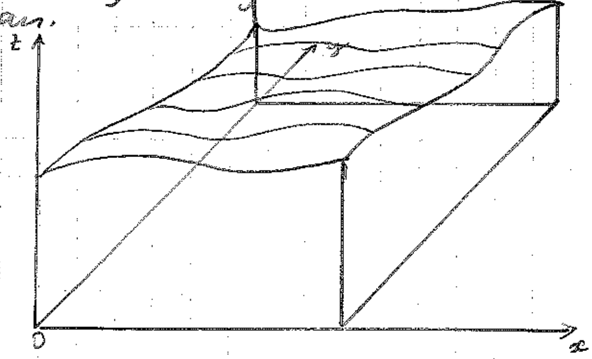
<u>Comparaison de cette méthode avec le problème de Cauchy</u>

1°/ Cette méthode a un avantage sur la méthode utilisée dans le problème de Cauchy. elle ne traite pas la question de la différentiation qui était une des conditions posées par le problème.

En effet on a vu que si l'on se donnait

une courbe de l'espace, on trouvait la surface intégrale passant par cette courbe. On n'a fait aucune supposition sur les dérivées de cette courbe. Par suite la courbe $\tau(y)$ du problème de Cauchy pouvait être une ligne brisée (on ne peut alors plus parler de dérivation). La seconde méthode donnerait la solution tandis que la 1ère méthode ne pouvait le faire. C'est donc un grand avantage.

2°/ Cette seconde méthode a cependant un désavantage sur la méthode de Cauchy : elle ne peut donner pour solution d'une surface intégrale passant par une courbe, qu'une surface couvrant seulement une partie du plan xoy tandis que par la méthode de Cauchy on peut en trouver une couvrant tout le plan.



En effet dans le problème de Cauchy si les conditions de dérivation et le développement existaient, on avait la solution couvrant tout le domaine pour lequel le développement était convergent.

On détermine de cette manière pour une valeur déterminée de y une surface couvrant une certaine tranche du plan xoy. Cette surface coupe le plan yot suivant une certaine courbe c_1. On peut maintenant avoir une solution en partant de cette courbe et en supposant convergent le développement suivant y existant. On fait les calculs et on obtient ainsi une nouvelle partie de la surface couvrant une tranche du plan y limité par l'axe des y et une parallèle pour un x constant (en longueur). On a ainsi un domaine assez étendu. On peut continuer au delà des domaines où les développements de x et de y ne sont pas convergents, en développant suivant une série de Taylor au lieu d'une série de Maclaurin. On peut ainsi de proche en proche remplir tout le plan (analogie avec le prolongement analytique v. p. 6)

Il n'en est pas ainsi dans la deuxième méthode. En effet il est vrai que l'on peut par chaque point de l'espace tracer une courbe appartenant à la surface. Seulement il faut que ce point soit à une distance finie car si cela n'avait pas lieu, le plan des normales, à l'infini, la droite perpendiculaire à ce plan n'auraient plus de sens et vraiment le domaine couvert par une surface intégrale passant par une courbe, trouvée par cette méthode ne comprend qu'une certaine partie du plan xoy. Exprimons analytiquement ce fait.

Nous avons vu que la recherche de la solution de l'équation

se ramenait à la ~~seule~~ solution d'un système de 2 équations

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A}$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{C}{A}$$

On sait ~~que~~ d'après les équations différentielles à une variable que ce système a une solution générale dépendant de deux constantes arbitraires (II^e c. p30) si l'on désigne par α et β ces deux constantes on obtient d'une manière générale ces deux solutions:

$$y = \varphi(x, \alpha, \beta)$$
$$z = \psi(x, \alpha, \beta)$$

On peut résoudre ces deux équations par rapport à α et β. On a:

$$\alpha = F_1(x, y, z)$$
$$\beta = F_2(x, y, z)$$

Pour chaque α et β constants on a lu l'équation de deux surfaces. Ces deux surfaces se coupent suivant une courbe. Si α et β varient on obtient une double infinité de courbes car elles dépendent deux paramètres α et β.
Or nous avons vu que les caractéristiques étaient ~~en~~ une simple infinité de droites. On conclue donc ~~que~~ pour que ceci ait lieu que l'on doit avoir une relation arbitraire entre α et β:

$$F_1(x, y, z) = F\left[F_2(x, y, z)\right]$$

C'est là justement la solution générale qui comme on le voit dépend bien d'une fonction arbitraire

<u>Exemples</u>

1°) $ap + bq = 1$ $\qquad$ a et b étant des constantes

Les caractéristiques sont définies par le système:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1} \quad \text{ou}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a} \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

Nous en tirons par intégration:

$$y = \frac{b}{a}x + \alpha$$

$$z = \frac{x}{a} + \beta$$

Ces deux équations donnent les caractéristiques. Pour avoir la solution générale, tirons α et β de ces 2 équations

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= y - \frac{b}{a}x \\ \beta &= z - \frac{x}{a} \end{aligned}\right\} (1)$$

On a donc la solution générale:

$$y - \frac{b}{a}x = F\left(z - \frac{x}{a}\right)$$

F étant une fonction quelconque.

Géométriquement, on peut voir ce que représente cette solution.

Les équations (1) sont des plans. Ces plans se coupent suivant des droites. Les caractéristiques sont donc des droites. De plus toutes ces droites sont parallèles car dans les équations (1) α et β ne sont ni coefficient de x, ni de y, ni de z. Ces droites ont d'ailleurs pour coefficients directeurs:

$$a,\ b,\ 1$$

Si l'on se donne une courbe de l'espace, par chaque point de cette courbe il passera une droite parallèle à la direction fixe ci-dessus. On voit donc que que les surfaces intégrales sont toutes les surfaces cylindriques engendrées par de telles droites.

2°/ $(x-a)p + (y-b)q = z - c$ $\qquad$ a, b, c sont des constantes

Les caractéristiques sont définies par:

$$\frac{dx}{x-a} = \frac{dy}{y-b} = \frac{dz}{z-c} \qquad \text{soit:}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{x-a} = \dfrac{dy}{y-b} \\ \dfrac{dx}{x-a} = \dfrac{dz}{y-b} \end{cases}$$

Ce système est facilement intégrable: les variables sont séparées.
On déduit facilement que:

$$\ln(x-a) = \ln(y-b) + K$$

En choisissant K convenablement on peut écrire:

$\ln(y-b) = \ln(x-a) + \ln \alpha$; soit en passant aux antilogarithmes:

$$y-b = \alpha(x-a) \qquad (1)$$

on a facilement de même:

$$z-c = \beta(x-a) \qquad (2)$$

On tire de là:

$$\alpha = \frac{y-b}{x-a} \quad ; \beta = \frac{z-c}{x-a}$$

et la solution générale est:

$$\frac{y-b}{x-a} = F\left(\frac{z-c}{x-a}\right)$$

Au point de vue géométrique il est facile de voir que les caractéristiques sont toujours des droites. En effet les équations (1) et (2) représentent deux plans. Leur intersection est donc une droite.
Toutefois ces droites ne sont pas parallèles puisque α et β sont les coefficients de x. Mais ces droites passent le même point:

$$x=a, \quad y=b, \quad z=c$$

car les équations (1) et (2) sont remplies simultanément pour ces valeurs spéciales de x, y, z quelque soient α et β.
On a donc en double infinité de droites passant par un point. Si on se donne une courbe de l'espace, (qui n'est pas une caractéristique, car si cela était toutes les caractéristiques passant par chaque point de la courbe se confondraient avec la courbe elle-même) on obtient la surface formée par une droite passant par un point fixe et s'appuyant sur une courbe. On a donc comme surfaces intégrales toutes surfaces coniques de sommet $x=a,\ y=b,\ z=c$

3°/ $(cy-bz)p + (az-cx)q = bx-ay$

a, b, c sont des constantes

Les caractéristiques sont données par:

$$\frac{dx}{cy-bz} = \frac{dy}{az-cx} = \frac{dz}{bx-ay}$$

Il faut intégrer le système. A cet effet soit ρ la valeur du rapport ci-dessus. On a:

$$dx = \rho (cy - bz)$$

$$dy = \rho (az - cx)$$

$$dz = \rho (bx - ay)$$

Si l'on multiplie dx par a, dy par b et dz par c et que l'on ajoute membre à membre, on obtient:

$$a dx = \rho (acy - abz)$$
$$b dy = \rho (baz - cbx)$$
$$c dz = \rho (cbx - acy)$$

$$a dx + b dy + c dz = \rho [acy - abz + abz - cbx + cbx - acy]$$
$$= \rho . 0 = 0$$

Donc: $$a dx + b dy + c dz = 0 \qquad (\lambda)$$

De même constituons la somme: $x dx + y dy + z dz$:

$$x dx + y dy + z dz = \rho [cxy - bxz + ayz - cxy + bxz - ayz)$$
$$= \rho . 0 = 0$$

Donc:

$$x dx + y dy + z dz = 0 \qquad (\delta)$$

L'équation (λ) ~~peut~~ est la différentielle de:

$$ax + by + cz$$

et l'équation δ est la différentielle de:

$$x^2 + y^2 + z^2$$ divisé par 2.

En intégrant on a donc:

$$ax + by + cz = \alpha \qquad (1)$$

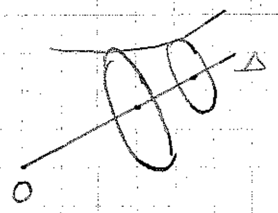
$$x^2 + y^2 + z^2 = \beta \qquad (2)$$

La solution générale est donc:

$$ax + by + cz = F (x^2 + y^2 + z^2)$$

Au point de vue géométrique, il est à remarquer que (1) est l'équation d'un plan, (2) celle d'une sphère.

Les caractéristiques sont donc des cercles. Cependant ~~comme~~ le plan (1) a une direction bien fixe puisque α est le ~~then~~ terme constant. On a donc des sections de sphère par un plan à direction fixe.
Les sphères passent par l'origine.
Si par ce point on mène la perpendiculaire à la direction ci-dessus les cercles plans des cercles seront perpendiculaires à cette droite et sont centrés sur cette droite.



Si l'on se donne une courbe de l'espace, les caractéristiques sont des cercles centrés sur la droite ci-dessus et passant par la courbe. On obtient donc une surface de révolution. La solution générale est donc la famille de toutes les surfaces de révolution d'axe Δ.

Mercredi, 27 |3|1935

Equation homogène: $Ap + Bq = 0$

Le système différentiel adjoint est:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A}$$

$$\frac{dz}{dx} = 0$$

On voit donc que la deuxième équation donne $z = cte$
Les courbes caractéristiques sont donc contenues dans des plans parallèles au plan xoy.

<u>Exemple</u>:

$$xp + yq = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \qquad y = \alpha x$$

$$\frac{dz}{dx} = 0 \qquad z = \beta$$

$$\alpha = \frac{y}{x}$$

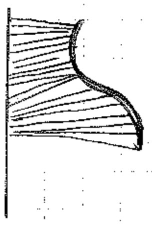
$$\beta = z$$

Les surfaces intégrales sont donc:

$$z = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Voyons ce que ceci représente géométriquement.

$z = \beta$ donne des plans parallèles à xoy, $y = \alpha x$ donne des plans passant par l'axe des z.
On a donc pour caractéristiques la double infinité des droites perpendiculaires à l'axe des z et rencontrant cet axe.



Si donc on se donne une courbe de l'espace les caractéristiques sont les perpendiculaires de chaque point de la courbe à l'axe des z et rencontrant cet axe. On obtient ainsi une surface dite conoïde.

surfaces réglées

C'est une surface réglée c'est-à-dire formée par des droites. Le cylindre et le cône sont aussi des surfaces réglées.

Reprenons l'étude de l'équation non linéaire du 1er ordre.

Soit donc l'équation aux dérivées partielles du 1er ordre :

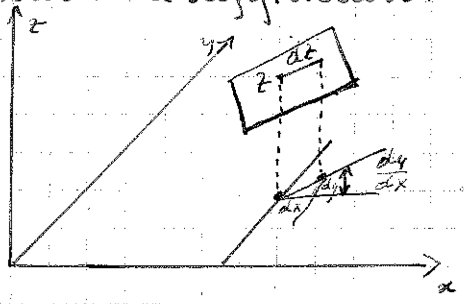
$$p = f(x, y, z, q)$$

avec

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad ; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Nous avons vu qu'en chaque point de l'espace il y a un cône des normales aux surfaces intégrales.
Il y a donc aussi une simple infinité de plans tangents passant par ce point. Ces plans constituent un cône dont les génératrices sont perpendiculaires à celles du cône des normales.

Sans aucune donnée supplémentaire on ne peut rien avancer sur la solution.
Nous pouvons faire donc une nouvelle supposition.



Soit un point de l'espace : x, y, z. Supposons qu'on donne la valeur de q en ce point. L'équation donne la valeur de p et ainsi on a le plan tangent à la surface intégrale au point x, y, z.

Soit sur un ce plan un point infiniment près du point z donc situé à la distance de ce point. Le fait que ce point se trouve sur ce plan tangent implique que :

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

On a donc avec les points x, y, z et $x+dx, y+dy, z+dz$ le commencement d'une courbe située sur la surface.

Il faut donc continuer à partir du point

$x+dx \quad , y+dy \quad , z+dz$

Seulement pour avoir le plan tangent en ce point il faut connaître la variation de q : dq. C'est là que consiste justement la difficulté.

Nous pouvons écrire puisque $q=q(x,y)$:

$$dq = \frac{\partial q}{\partial x} dx + \frac{\partial q}{\partial y} dy \qquad \text{ou}$$

$$\frac{dq}{dx} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} y' \quad ; \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

Ici il faut remarquer que y' est tout à fait arbitraire car on doit déplacer arbitrairement sur le plan tangent ; dx et dy sont donc arbitraires.

Donc :
$$\frac{dq}{dx} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} y' \qquad (1)$$

Il faut trouver $\frac{\partial q}{\partial x}$ et $\frac{\partial q}{\partial y}$

Mais :

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{: avec } x \text{ constant)}$$

Or $\quad p = f(x, y, z, q)$

Il faut donc dériver p par rapport à y en supposant x constant. On a toujours que z et q sont fonctions de x et y. On aura donc :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial y}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot q + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial y}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ connu ; $\frac{\partial f}{\partial z}$ connu ; $\frac{\partial f}{\partial q}$ connu.

Il reste justement $\frac{\partial q}{\partial y}$ dont a besoin.

En remplaçant $\frac{\partial q}{\partial x}$ par sa valeur dans (1) on a :

$$\frac{dq}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q + \frac{\partial q}{\partial y}\left(y' + \frac{\partial f}{\partial q}\right)$$

On a toujours $\frac{\partial q}{\partial y}$ d'inconnue. Le problème ne

serait donc pas soluble. Aussi pour supprimer la difficulté on opère ainsi.

On a vu que le choix de y' était arbitraire. Alors on choisira y' de telle sorte ~~de manière~~ que le coefficient de $\frac{\partial q}{\partial y}$ soit nul:

$$y' + \frac{\partial f}{\partial q} = 0$$

$$y' = -\frac{\partial f}{\partial q} \quad = \text{valeur connue à partir de } p = f(x,y,z,q)$$

Avec cette supposition on aura:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial q}$$

$$\frac{dz}{dx} = p + qy' = p - q\frac{\partial f}{\partial q}$$

$$\frac{dq}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}$$

Ce sont des valeurs connues à partir de f et de x, y, z, q

On aura donc:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial q} = \varphi(x,y,z)$$

$$\frac{dz}{dx} = p - q\frac{\partial f}{\partial q} = \psi(x,y,z)$$

$$\frac{dq}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} = \chi(x,y,z)$$

On a donc trouvé 3 équations simultanées à une variable

Les deux premières donnent justement une courbe qui est située sur la surface. On a donc retrouvé les caractéristiques de la surface.

Jeudi 28 |3| 1935

Introduisons les notations:

$$f_q = \frac{\partial f}{\partial q} \; ; \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \; ; \quad f_z = \frac{\partial f}{\partial z} \quad ; \quad y' = \frac{dy}{dx} \; ; \quad z' = \frac{dz}{dx} \; ; \quad q' = \frac{dq}{dx}$$

On aura donc les 3 équations trouvées dans la leçon

prendrons la forme:

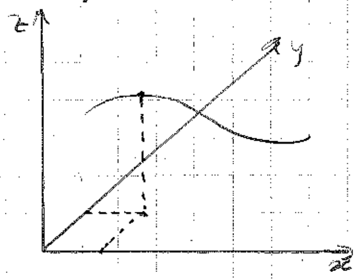
$$y' = -f_q$$

$$z' = f - q f_q$$

$$q' = f_y + q f_z$$

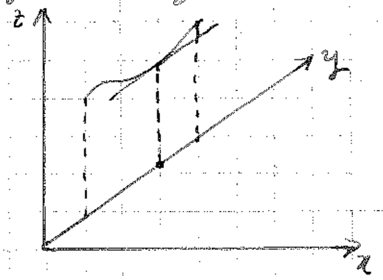
Ce système de 3 équations simultanées dépend de 3 constantes arbitraires. Il s'ensuit donc qu'en chaque point il y a une triple infinité de courbes.

Voyons donc comment l'on pourra trouver la surface intégrale passant par une courbe de l'espace.



Considérons un point z de la courbe. On se [pose] pour avoir la caractéristique passant par ce point on doit avoir q. Cette valeur étant arbitraire on voit donc que l'on a une infinité de caractéristiques passant par le point. Le problème reste donc indéterminé.

Mais voici un cas plus simple: supposons que l'on donne la courbe arbitraire dans le plan yz comme dans le problème de Cauchy.



Ainsi pour $x=0$ on donne la courbe:

$$z = \psi(y)$$

Considérons donc un point de cette courbe. En ce point $x=0$, y = valeur arbitraire, z sera déduit de $\psi(y)$. Il faut maintenant avoir q. Mais rappelons nous que:

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{avec } x \text{ constant.}$$

C'est donc la pente de la tangente à la surface dans le plan $x =$ cte. Dans notre exemple $x=0$, on est bien dans un plan où $x =$ cte. La tangente à la surface n'est donc autre chose que la tangente au point z à la courbe $\psi(y)$; par suite la pente de cette tangente n'est autre que:

$$q = \psi'(y)$$

Donc : à partir de $z=\psi(y)$ et $q=\psi'(y)$ on peut construire la courbe caractéristique et avoir la surface intégrale cherchée.

Si l'on compare ce résultat avec le cas de l'équation linéaire on constate justement que dans ce nouveau problème, on implique l'existence de la dérivée $\psi'(y)$ ce que l'on ne faisait pas du tout dans ~~la fo~~ l'équation linéaire.

Montrons donc que si l'on a une équation linéaire l'existence de $\psi'(y)$ ne joue pas un rôle dans la solution.

En effet, l'équation linéaire était :

$$Ap + Bq = C \qquad (A \neq 0)$$

Calculons y', z', q'. $\qquad f = p = \frac{C - Bq}{A}$

$$y' = -f_q = +\frac{B}{A}$$

$$z' = f - q f_q = \frac{C - Bq}{A} + q\frac{B}{A} = \frac{C}{A}$$

On a trouvé

$$y' = +\frac{B}{A}$$

$$z' = \frac{C}{A}$$

Dans les équations on n'a que les variables x, y, z. et q n'interviennent pas. Ces deux équations sont donc simultanées par rapport à x, y, z. Elles forment donc un système. La 3ᵉ équation en q' contiendra q et ne sera pas simultanée avec les autres car : dans les équations simultanées, il faut que les mêmes variables apparaissent dans toutes les 3 équations. le fait entraîne que $q' = ..$ est une équation à part qui ne nous intéresse pas.

<u>Exemple</u>

$$p = x^2 + y - q^2 \qquad (p \text{ n'est pas une fonction linéaire de } q)$$

Cherchons le système donnant les caractéristiques. A cet effet calculons :

$$f_q = -2q \quad , \quad f_y = 1 \quad ; \quad f_z = 0$$

D'où :

$$y' = -f_q = 2q \quad ; \quad z' = x^2 + y + q^2 \qquad q' = 1$$

Il faut intégrer ce système. Dans la dernière équation donne immédiatement

$$q = x + \alpha \qquad (1) \qquad \alpha = \text{cte arbitraire}$$

Si l'on porte cette valeur dans la première équation on obtient

$$y' = 2x + 2\alpha$$

et en intégrant

$$y = x^2 + 2\alpha x + \beta \qquad (2) \qquad \beta = \text{cte arbitraire}$$

En remplaçant dans la 2e équation q et y par leurs valeurs on obtient

$$z' = x^2 + x^2 + 2\alpha x + \beta + (x+\alpha)^2$$

$$z' = 3x^2 + 4\alpha x + \beta + \alpha^2$$

En intégrant on obtient

$$z = x^3 + 2\alpha x^2 + (\beta + \alpha^2) x + \gamma \qquad (3)$$

Si l'on prend des valeurs particulières pour α, β, γ on obtient une courbe dont on sait qu'elle est sûrement située sur une surface intégrale.

On a donc l'intégrale générale.

La difficulté apparaît quand on veut avoir une solution particulière : il faut éliminer les paramètres α, β, γ suivant les conditions posées.

Supposons donc que l'on donne dans le plan

$x = 0 \quad (yz)$ la courbe $z = \psi(y)$

Trouvons la surface intégrale qui passe par cette courbe.

Nous savons que :

$$q = \psi'(y)$$

$\psi(y)$ doit au moins avoir une dérivée du 1er ordre.

Il faut donc éliminer α, β, γ étant donnés :

que pour $x=0$, $z=\Psi(y)$ et $q'=\Psi'(y)$

(ce n'est pas généralement facile)

L'équation (1) donne quand on y fait $x=0$:

$$q=\alpha=\Psi'(y)$$

~~La~~ L'équation (2) donne quand on y fait $x=0$:

$$\beta=y$$

Enfin l'équation (3) donne pour $x=0$; ~~$\Psi(y)$~~ $=\gamma$

On a donc trouvé :

$$\alpha=\Psi'(y) \quad ; \beta=y \quad ; \quad \gamma=\Psi(y)$$

Il ressort de ces égalités que :

$$\alpha=\Psi'(\beta)$$
$$\gamma=\Psi(\beta)$$

En général q, y, z sont des fonctions quelconques de α, β, γ. Mais il ne faut pas oublier la relation $z=\Psi(y)$ qui lie z et y quand $x=0$

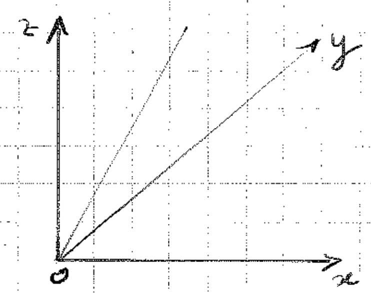
En remplaçant α par $\Psi'(\beta)$ dans l'équation (2) on obtient :

$$y=x^2+2x\Psi'(\beta)+\beta$$

Ainsi β est une fonction de x, y. On tire sa valeur de l'équation ci-dessus et alors l'équation (3) qui devient :

$$z=x^3+2x^2\Psi'(\beta)+x[\beta+\Psi'^2(\beta)]+\Psi(\beta)$$

quand on y fait : $\alpha=\Psi'(\beta)$, $\gamma=\Psi(\beta)$ est bien déterminée en fonction de x et y et on a trouvé la solution



Par exemple si l'on prend

$$\Psi(y)=y$$

(La courbe $\Psi(y)$ est la bissectrice de l'angle yOz.)

on a : $\Psi'(y)=1$

Alors :

$$y = x^2 + 2x\psi'(\rho) + \beta$$

devient : $y = x^2 + 2x + \beta$

D'où $\beta = y - x^2 - 2x$

et on obtient enfin :

$$z = x^3 + 2x^2 + x\left[y - x^2 - 2x + 1\right] + y - x^2 - 2x$$

$$z = xy - x + y - x^2$$

Lundi 1/4/1935

Nous avons vu que pour résoudre l'équation

$$p = f(x, y, z, q)$$

il fallait résoudre le système :

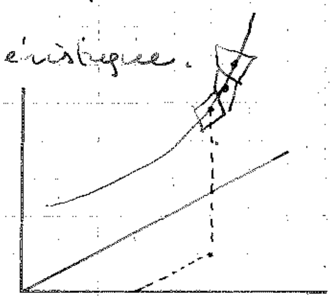
$$\frac{dy}{dx} = -f_q$$

$$\frac{dz}{dx} = f - qf_q$$

$$\frac{dq}{dx} = f_y + qf_z$$

Nous avons vu qu'en chaque point x, y, z si q était donné on avait une courbe caractéristique.

En réalité on a plus d'une courbe caractéristique.



En effet si en chaque point de l'espace q est donné, on tire aussitôt p de l'équation $p = f(x, y, z, q)$.

On a donc en chaque point p et q.

Or p et q déterminent en un point ~~la to~~ le plan tangent à la surface caractéristique. Ainsi quand on part d'un point de l'espace on a d'abord une courbe caractéristique ; la connaissance de p et de q en chaque point (déduite de $\frac{dq}{dx} = f_y + qf_z$ et d'une équation en $\frac{dp}{dx}$ qu'on verra) permet de déterminer en chaque point de la courbe caractéristique des **éléments de contact** avec les surfaces intégrales. On peut supposer que ces éléments sont sur la surface. D'où l'on obtient ce qu'on appelle **une lame caractéristique** au lieu

d'une courbe caractéristique seulement.

Donc pour une équation aux dérivées partielles du 1er ordre il existe en chaque point de l'espace des courbes caractéristiques c'est-à-dire des courbes le long desquelles on a une simple infinité d'éléments de contact.

On peut rendre plus symétriques les données en introduisant la dérivée: $\frac{dp}{dx}$.

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial p}{\partial y}$$

Mais $\frac{dy}{dx} = -f_q$. Donc:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial p}{\partial x} - f_q \frac{\partial p}{\partial y}$$

Mais la dérivée $\frac{\partial p}{\partial x}$ suppose y constant comme

$$p = f(x, y, z, q)$$

il suffit donc de dériver f par rapport à x en supposant y constant. On obtient:

$$\frac{dp}{dx} = f_x + f_z \frac{\partial z}{\partial x} + f_q \frac{\partial q}{\partial x} - f_q \frac{\partial p}{\partial y}$$

Si l'on se rappelle que:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

on obtient en supprimant les termes inutiles:

$$\frac{dp}{dx} = f_x + f_z \frac{\partial z}{\partial x} = f_x + p f_z$$

On a donc ainsi 4 équations simultanées:

$$\frac{dy}{dx} = -f_q \quad ; \quad \frac{dz}{dx} = f - q f_q \quad ; \quad \frac{dp}{dx} = f_x + p f_z \quad ; \quad \frac{dq}{dx} = f_y + q f_z$$

Toutefois on ne complique pas le problème par l'adjonction de la nouvelle équation car cette équation est déjà résolue par:

$$p = f(x, y, z, q)$$

Ce n'est simplement que pour la symétrie des dispositions. Aussi dans la pratique il ne faut pas en tenir compte.

Cependant l'adjonction de cette nouvelle équation nous permettra de traiter le

Cas général de l'équation du 1er ordre

quand l'équation différentielle est donnée sous la forme:

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

sans chercher à évaluer explicitement p.

Le problème peut se réduire facilement au cas de

$$p = f(x, y, z, q)$$

Il suffit d'exprimer les dérivées de f en fonction de celles de F et de les remplacer dans le système des 4 équations simultanées. Ces opérations n'admettent pas de difficulté.

f_q signifie la dérivée de f par rapport à q, x, y, z étant supposés constants. Comme $p = f$, f_q n'est autre que la dérivée de p par rapport à q, x, y, z étant supposés constants. Mais si dans :

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

on suppose x, y, z constants on a une relation seulement en p et q. On peut donc différentier totalement. On obtient :

$$F_p \, dp + F_q \, dq = 0$$

$$\frac{dp}{dq} = -\frac{F_q}{F_p} = -f_q$$

$$\left| \begin{array}{ll} F_p = \dfrac{\partial F}{\partial p} ; & F_q = \dfrac{\partial F}{\partial q} \\ F_x = \dfrac{\partial F}{\partial x} ; & F_y = \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ F_z = \dfrac{\partial F}{\partial z} & \end{array} \right.$$

C'est la valeur f_q cherchée car $\frac{dp}{dq}$ a été calculée dans les mêmes conditions que f_q : x, y, z constants.

Aussi il ne faut pas s'effaroucher du fait que :

f_q s'écrit avec des ∂ ronds et $\frac{dp}{dq}$ avec des d droits

Ils auront la même signification. Donc on a bien

$$f_q = -\frac{F_q}{F_p}$$

D'une manière tout à fait identique on voit facilement que.

$$f_y = -\frac{F_y}{F_p}$$

(f_y suppose x, z, q constants, donc dans ce cas $F(x, y, z, p, q) = 0$ ne représente qu'une relation entre y et p)

De même $$f_z = -\frac{F_z}{F_p}$$

et enfin : $$f_x = -\frac{F_x}{F_p}$$

(Dans le calcul de f_x on suppose y, z, q constants. et alors $F(x,y,z,p,q)=0$ ne représente qu'une relation entre x et p. En prenant les différentielles totales on a : $F_x\, dx + F_p\, dp = 0$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{F_x}{F_p}$$

Il faut remarquer que $\frac{dp}{dx}$ ne représente pas la dérivée totale de p par rapport à x mais seulement la dérivée de p par rapport à x y, z, q étant supposés constants.)

En remplaçant f_x ; f_y ; f_q par leurs valeurs et aussi f par p on obtient les nouvelles équations simultanées ci-dessous:

$$\frac{dy}{dx} = +\frac{F_q}{F_p} \quad ; \quad \frac{dz}{dx} = p + q\frac{F_q}{F_p} \quad ; \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{F_x}{F_p} - p\frac{F_z}{F_p} ; \quad \frac{dq}{dx} = -\frac{F_y}{F_p} - q\frac{F_z}{F_p}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{pF_p + qF_q}{F_p} \quad ; \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{F_x + pF_z}{F_p} \quad ; \quad \frac{dq}{dx} = -\frac{F_y + qF_z}{F_p}$$

L'intégration de ces 4 équations donne les lames caractéristiques.

On peut rendre plus symétriques ces expressions en utilisant une forme paramétrique.
Si l'on suppose que x, y, z sont fonctions d'un paramètre t on peut écrire:

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t)$$

Pour avoir les lames caractéristiques il faut aussi que l'on donne :

$$p = p(t) \qquad q = q(t)$$

mais de façon que x, y, z, p, q satisfasse à l'équation:

$$F(x, y, p, q) = 0$$

On a: $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Mais si l'on pose:

$$\frac{dx}{dt} = x' ; \quad \frac{dy}{dt} = y' ; \quad \frac{dz}{dt} = z' ; \quad \frac{dp}{dt} = p' ; \quad \frac{dq}{dt} = q'$$

On a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} ; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z'}{x'} ; \quad \frac{dp}{dx} = \frac{p'}{x'} ; \quad \frac{dq}{dx} = \frac{q'}{x'}$$

Comme le choix du paramètre t est arbitraire supposons que l'on prenne t de manière que:

$$x' = F_p$$

Alors on obtient maintenant les équations.

$$y' = F_q$$

$$z' = pF_p + qF_q$$

$$p' = -F_x - pF_z$$

$$q' = -F_y - qF_z$$

On peut ajouter:

$$x' = F_p$$

En intégrant ces équations on obtient 5 fonctions de t.

Soit $t = t_0$ une valeur de point de départ du paramètre. Si l'on donne:

$$x_0 = x(t_0) \quad ; \quad y_0 = y(t_0) \quad ; \quad z_0 = z(t_0) \quad ; \quad p_0 = p(t_0) \; ; \; q_0 = q(t_0)$$

Dans un espace à 5 dimensions par exemple on obtient la solution qui serait dans notre espace à 3 dimensions des lames caractéristiques.

Il s'agit maintenant de montrer que si on donne une courbe de l'espace, on a une seule solution et une seule passant par la courbe, qui satisfasse aux conditions initiales données: ~~t_0, y_0, z_0, p_0, q_0~~.

Mardi 2/4/1935

Soit donc donnée une courbe de l'espace par les égalités.

$$x = f(t_0) \quad ; \quad y = g(t_0) \quad ; \quad z = h(t_0)$$

Considérons un point t_0 de la courbe. Il s'agit de déterminer la lame caractéristique passant par ce point.

Seulement les valeurs initiales de x, y, z ne suffisent pas. Il faut aussi avoir p et q afin de résoudre les 5 équations simultanées. Voyons donc comment on calcule les valeurs initiales de p et q, x, y, z étant connus.

Nous avons toujours l'équation fondamentale:

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

Faisons $x = f(t_0)$, $y = g(t_0)$, $z = h(t_0)$. Nous avons une première relation entre p et q:

$$F\left[f(t_0), g(t_0), h(t_0), p, q\right] = 0 \qquad (1)$$

Il faut trouver maintenant une seconde relation.
Pour y arriver il faut supposer que l'accroissement de z se trouve dans l'élément de contact au point x, y, z.
En d'autre terme on doit avoir:

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Mais $x = f(t_0)$, $y = g(t_0)$, ~~g=~~ $z = h(t_0)$

$$dx = f'(t_0)\,dt_0 \;;\; dy = g'(t_0)\,dt_0 \;;\; dz = h'(t_0)\,dt_0$$

D'où:

$$h'(t_0)\,dt_0 = p\,f'(t_0)\,dt_0 + q\,g'(t_0)\,dt_0$$

Soit en supprimant dt_0:

$$h'(t_0) = p\,f'(t_0) + q\,g'(t_0) \qquad (2)$$

C'est justement une seconde relation entre p et q car les dérivées f', g', h' sont connues.

On peut donc déduire de (1) et (2) p et q en fonction de t_0. On connaît donc au point de départ:

$$x = f(t_0) \;,\; y = g(t_0) \;,\; z = h(t_0) \;,\; p = p(t_0) \;,\; q = q(t_0)$$

On peut donc écrire et résoudre les 5 équations simultanées bien connues et ainsi avoir au point de départ une bande caractéristique.
En faisant le même raisonnement pour chaque point de la courbe on obtient la surface qui passe par la courbe et ainsi on a trouvé la solution du problème de Cauchy qui consiste à trouver la surface intégrale passant une courbe donnée de l'espace.

L'intégration des 5 équations nous fournira 5 fonctions de t et aussi de t_0 qui est le point de départ.
En prenant parmi ces solutions celles qui nous intéressent:

$$x = x(t, t_0) \qquad y = y(t, t_0) \;,\; z = z(t, t_0)$$

(p et q doivent être calculés pour pouvoir résoudre simultanément les 5 équations. Nous n'en tenons pas compte parce que cela ne nous intéresse pas.)

A partir de ces fonctions il faut éliminer ~~t~~ t et t_0 et on obtient une relation:

$$z = z(x, y)$$

qui est l'équation de la surface cherchée

Nous voyons que la résolution du problème n'est pas généralement facile quoique l'on ait deux variables et une équation du premier ordre.
Aussi considérons le cas particulier suivant:

Équation de Clairaut

Dans ce cas on donne F sous la forme:

$$F \equiv px + qy + \varphi(p, q) - z = 0$$

$\varphi(p,q)$ est une fonction quelconque de p et q.
Étudions cette équation.

On se rappelle que dans les équations différentielles ordinaires l'équation de Clairaut était:

$$y = xy' + \varphi(y') \quad \text{ou} \quad xy' + \varphi(y') - y = 0$$ (v. II^e Cah. p. 22)

Elle avait pour solution générale une famille de droites

Nous verrons maintenant que par analogie l'équation aux dérivées partielles de Clairaut donne une famille de plans.

En effet supposons que l'on donne à p et q une valeur constante:

$$p = p_1 \qquad q = q_1$$

On a alors:

$$p_1 x + q_1 y + \varphi(p_1 q_1) - z = 0$$

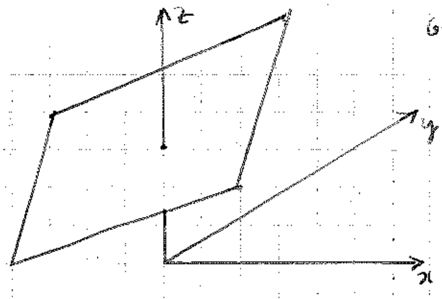
comme $\varphi(p_1 q_1) =$ cte on voit que l'on a eu une équation linéaire en x, y, z. c'est donc l'équation d'un plan. On voit que cette équation est fonction de deux paramètres: p et q. Or il y a dans l'espace une triple infinité de plans [$z = Ax + By + C$]. ~~L'éq~~ On a donc pour ~~solution~~ l'équation $px + qy + \varphi(p,q) - z = 0$ une double infinité de plans obtenus par un choix fait sur la triple infinité de plans de manière que l'équation ci-dessus soit remplie. Ces plans sont une des solutions de l'équation. En effet on a:

$$p_1 x + q_1 y + \varphi(p_1 q_1) - z = 0$$

Montrons qu'ils satisfont à l'équation; en effet:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = p_1 \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y} = q_1$$

En remplaçant p_1 et q_1 par p et q on voit bien que l'équation est remplie



Ainsi on a une double infinité de plans définis par les directions arbitraires: p et q.

Voyons maintenant les autres solutions obtenues par la résolution directe de l'équation. On a:

$$F \equiv px + qy + \varphi(p,q) - z = 0$$

$$F_p = x + \varphi_p$$

$$F_q = y + \varphi_q$$

$$F_x = p$$

$$F_y = q$$

$$F_z = -1$$

Alors on a les 5 équations:

$$x' = F_p = x + \varphi_p$$

$$y' = F_q = y + \varphi_q$$

$$z' = pF_p + qF_q = p(x+\varphi_p) + q(y+\varphi_q)$$

$$p' = -F_x - pF_z = -p - p.-1 = -p + p = 0$$

$$q' = -F_y - qF_z = -q - q.-1 = -q + q = 0$$

On voit que p' et q' sont nulles. C'est-à-dire que p et q sont constants par rapport à t. Les éléments de contact sont donc parallèles.

p et q étant indépendants de t $\varphi(p,q)$ l'est aussi et par suite φ_p et φ_q sont constants par rapport à t.

alors:

$$x' = \frac{dx}{dt} = x + \varphi_p$$

$$dt = \frac{dx}{x+\varphi_p}$$

$$t = \ln(x+\varphi_p) - \ln A = \ln\frac{(x+\varphi_p)}{A}$$

A = c^te arbitraire

$$x + \varphi_p = Ae^t$$

On a identiquement: $y + \varphi_q = Be^t$

Nous trouvons aussi :

$$z' = p.Ae^t + q.Be^t = e^t(Ap+Bq)$$

Comme p et q ne dépendent pas de t, Ap+Bq est constant alors on a par intégration:

$$z = (Ap+Bq)e^t + C$$

On a donc trouvé :

(1) $x+\varphi_p = Ae^t$

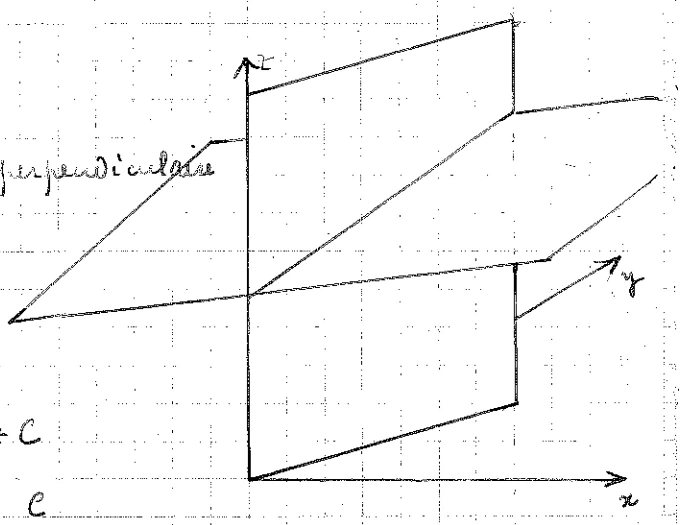
(2) $y+\varphi_q = Be^t$

(3) $z = (Ap+Bq)e^t + C$

Les constantes A, B, C dépendent de t_0.

Il est facile de voir que les courbes caractéristiques sont des droites. En effet en divisant (1) par (2) on obtient:

$$\frac{x+\varphi_p}{y+\varphi_q} = \frac{B}{A}$$



C'est l'équation d'un plan perpendiculaire au plan xoy.

De même :

$$z = pAe^t + qBe^t + C$$

$$z = p(x+\varphi_p) + q(y+\varphi_q) + C$$

$$z = px+qy + p\varphi_p + q\varphi_q + C$$

$$z = px+qy + c^{te}$$

C'est aussi l'équation d'un plan. Ce plan et le précédent se coupent suivant une droite. Donc les caractéristiques sont des droites et par suite les lames caractéristiques sont des lames planes.

<u>Application</u>. I/ $F \equiv px+qy + p^2-q^2-z=0$ $\quad [\varphi(p,q) = p^2-q^2]$

Supposons que nous prenions :

$$x=t_0=f(t_0);\ y=-t_0=g(t_0);\ z=t_0^2=h(t_0)$$

(si l'on prenait 3 fonctions linéaires on aurait des plans comme solutions ce qui n'est guère intéressant étant donné que les plans sont déterminés dès le début)

Il faut avant tout déterminer p et q en fonction de t_0.

A cet effet faisons: $x = t_0$, $y = t_0$, $z = t_0^2$ dans F. On a:

$$p t_0 - q t_0 + p^2 - q^2 - t_0^2 = 0$$

C'est une première équation. La seconde est fournie par:

$$h'(t_0) = f'(t_0)\, p + g'(t_0)\, q \qquad \text{ou}$$

$$2t_0 = p - q$$

D'où l'on a dans la première équation en y faisant $p - q = 2t_0$:

$$2t_0^2 + 2t_0(p+q) - t_0^2 = 0$$

$$t_0^2 + 2t_0(p+q) = 0$$

$$p + q = -\frac{t_0}{2}$$

On a aussi $\quad p - q = 2t_0$

On en déduit: $\begin{cases} p = \dfrac{3t_0}{4} \\ q = -\dfrac{5}{4} t_0 \end{cases}$

$$\varphi(p,q) = p^2 - q^2$$
$$\varphi_p = 2p$$
$$\varphi_q = -2q$$

D'où l'on a:

$$x = Ae^t - \varphi_p = Ae^t - 2p = Ae^t - \frac{3}{2}t_0 - 2p$$

Pour avoir A faisons $t = t_0$ de part et d'autre.
Dans ce cas x devient t_0 ~~et~~ (par hypothèse) et alors:

$$t_0 = Ae^{t_0} - \frac{3}{2}t_0$$

$$A = \frac{5}{2} t_0 e^{-t_0}$$

D'où $\quad x = \frac{5}{2} t_0 e^{t - t_0} - \frac{3}{2} t_0$

Mercredi 3/4/1935

On a trouvé:

$$x + \frac{3}{2}t_0 = \frac{5}{2} t_0 e^{t - t_0}$$

D'une manière tout à fait identique on trouve:

$$B = \frac{3}{2} t_0 e^{-t_0}$$

et

$$y + \frac{5}{2} t_0 = \frac{3}{2} t_0 e^{t - t_0}$$

Pour avoir z rappelons nous que l'on a trouvé :

$$z = (pA + qB)e^{t_0} + cte$$

Pour avoir la constante faisant $t = t_0$ de part et d'autre et remplaçons z, A, B, p, q par leur valeurs que ces variables prennent dans ce cas. On aura

$$t_0^2 = \frac{3t_0}{4}\frac{5}{2}t_0\, e^{-t_0} - \frac{5}{4}t_0 \cdot \frac{3}{2}t_0\, e^{t_0} + cte$$

$$t_0^2 = 0 + cte$$

Donc la constante est t_0^2

Mais il est facile de voir que :

$$pA + qB = 0 \quad \text{sans faire } t = t_0$$

En effet ceci est évident car p, q, A, B sont des constantes et par suite ne sont fonctions que de t_0.

Donc on a : $z = t_0^2$

On a donc trouvé :

$$x + \frac{3}{2}t_0 = \frac{5}{2}t_0\, e^{t-t_0} \qquad (1)$$

$$y + \frac{5}{2}t_0 = \frac{3}{2}t_0\, e^{t-t_0} \qquad (2)$$

$$z = t_0^2 \qquad (3)$$

En divisant (1) par (2) membre à membre, on obtient

$$\frac{x + 3/2\, t_0}{y + 5/2\, t_0} = \frac{5}{3}$$

(3) nous donne : $t_0 = \sqrt{z}$

D'où $$\frac{x + 3/2\sqrt{z}}{y + 5/2\sqrt{z}} = \frac{5}{3}$$

$$5y + \frac{25}{2}\sqrt{z} = 3x + \frac{9}{2}\sqrt{z}$$

$$5y - 3x = \left(\frac{9}{2} - \frac{25}{2}\right)\sqrt{z} = -8\sqrt{z}$$

$$z = \left(\frac{5y - 3x}{8}\right)^2$$

C'est la solution cherchée

on peut le vérifier. En effet calculons p et q et vérifions si l'équation

$$F = px + qy + p^2 - q^2 - z = 0$$

est remplie.

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{8}\left(\frac{5y-3x}{8}\right) \cdot -3 = -\frac{6}{64}(5y-3x)$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = 2\left(\frac{5y-3x}{8}\right) \cdot \frac{5}{8} = \frac{10}{64}(5y-3x)$$

$$F = -\frac{6x}{64}(5y-3x) + \frac{10y}{64}(5y-3x) + \frac{36}{64}(5y-3x)^2 - \frac{100}{64}(5y-3x)^2 - \frac{1}{64}(5y-3x)^2$$

$$F = (5y-3x)\left[-\frac{6x}{64} + \frac{10y}{64} + \frac{36}{(64)^2}(5y-3x) - \frac{100}{(64)^2}(5y-3x) - \frac{1}{64}(5y-3x)\right]$$

$$= (5y-3x)\left[\frac{2}{64}(5y-3x) + \frac{36}{(64)^2}(5y-3x) - \frac{100}{(64)^2}(5y-3x) - \frac{1}{64}(5y-3x)\right]$$

$$= \frac{(5y-3x)^2}{64}\left[2 + \frac{36}{64} - \frac{100}{64} - 1\right]$$

$$= \frac{(5y-3x)^2}{64}\left[\frac{64+36-100}{64}\right] \equiv 0$$

Donc F est bien vérifié.

Si l'on fait $x = t_0$ $y = -t_0$ on obtient:

$$z = \frac{(-5t_0 - 3t_0)^2}{64} = t_0^2$$

on voit donc que les conditions initiales sont aussi remplies. On a bien la solution

II Nous supposons que:

$$F \equiv p - \varphi(x, q) = 0$$

D'où: $F_p = 1$, $F_q = -\varphi_q$; $F_x = -\varphi_x$; $F_y = F_z = 0$

alors on a les 5 équations simultanées:

$$x' = 1 \quad ; \quad y' = -\varphi_q \quad ; \quad z' = p - q\varphi_q \quad ; \quad p' = \varphi_x \quad ; \quad q' = 0$$

On voit que q est constant.

$$q=\beta$$

alors de $x'=1$ on tire :

$$x = t+\alpha$$

D'autre part :

$$y'=-\varphi_q$$

comme $\varphi=\varphi(x,q)$

$$\varphi_q=\varphi_q(x,q)$$

et alors :

$$y = \int^t -\varphi_q(t+\alpha,\beta)\,dt$$

car x et q sont connus.

De même :

$$p=-\int^t \varphi_x(t+\alpha,\beta)\,dt$$

et de la même façon z aussi s'obtient par une simple quadrature.

On voit donc que l'on a déjà une bonne difficulté dans les équations aux dérivées partielles du 1er ordre à deux variables. Par suite le problème de plusieurs variables est compliqué et nous ne le traiterons pas.

Nous passons maintenant aux :

Equation du second ordre

Une équation du second ordre est une relation :

$$F\left(x,y,z,p,q,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=0$$

entre deux variables indépendantes x et y, une fonction inconnue z de ces deux variables et $p, q, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ dérivées partielles du 1er et du second ordre.

L'intégration de l'équation dans toute sa généralité n'est pas très simple aussi nous nous bornerons seulement à l'équation linéaire par rapport à $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

que nous écrivons sous la forme :

$$A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F$$

A, B, C, F étant des fonctions quelconques de x, y, z, p, q

Les équations de ce genre sont les équations que l'on rencontre très souvent dans la physique mathématique, surtout dans des cas particulier.

Par exemple l'équation :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

est l'équation du potentiel. On verra que l'on a un très grand nombre de solutions et il y a même une branche de la physique mathématique qui s'en occupe spécialement.

On rencontre aussi l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

On verra que les solutions de cette équation ont des propriétés toutes différentes de celles des solutions de l'équation avec le signe +.

Etudions donc l'équation linéaire.

Pour simplifier l'écriture posons :

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad ; \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad ; \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

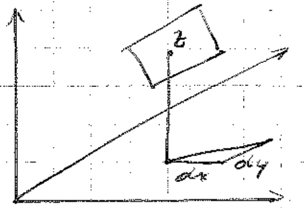
D'où l'équation :

$$Ar + 2Bs + Ct = F$$

Traitons un peu le problème géométriquement.

Considérons un point de l'espace. Supposons données en ce point les dérivées p et q qui nous détermineront un élément de contact au point considéré.

Si l'on connaissait les dérivées r, s, t de p et q on pourrait avancer à partir de l'élément de contact défini par p et q.



Mais pour déterminer r, s, t on n'a que la relation :

$$Ar + 2Bs + Ct = F$$

trois inconnues, une seule relation : On aura donc une double infinité de modes de départ à partir d'un élément de contact déterminé.

Projetons le point z sur le plan xoy. Donnons à cette projection un déplacement arbitraire dx, dy. Il en résultera pour p et q certaines variations fournies par :

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy = r\,dx + s\,dy$$

$$dq = \frac{\partial q}{\partial x} dx + \frac{\partial q}{\partial y} dy = s\,dx + t\,dy$$

Si nous supposons connus dp et dq nous avons là deux relations pour r, s, t. En retenant la relation fournie par l'équation différentielle en elle-même on a 3 équations linéaires à 3 inconnues pour r, s, t :

$$Ar + 2Bs + Ct = F$$

$$r\,dx + s\,dy = dp$$

$$s\,dx + t\,dy = dq$$

(On voit maintenant pourquoi on a pris une équation linéaire en r, s, t comme équation différentielle. C'est pour avoir un système linéaire facilement soluble, tandis qu'une éq système de degré supérieur ne l'est pas du tout en général)

Jeudi 4/4/1935

(Pas de leçon : le professeur est malade)

Lundi 8/4/1935

On a trouvé dans la leçon précédente le système des 3 équations linéaires pour r, s, t :

$$Ar + 2Bs + Ct = F$$

$$dx.r + dy.s \quad = dp$$

$$dx.s + dy.t = dq$$

Ces 3 équations permettent d'avancer d'un élément de contact à un autre en se déplaçant dans le plan xy dans une direction quelconque: dx et dy arbitraires pour un dp et un dq donnés.

Aussi on doit prendre arbitrairement aussi dp et dq. Mais ceci n'a pas lieu quand le déterminant des coefficients du système s'annule:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & 2B & C \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0$$

Car dans ce cas les 3 équations ne sont plus indépendantes (d'après théorie des systèmes linéaires)

Par suite dp et dq ne seront plus indépendants c'est-à-dire arbitraires pour le choix particulier de dx et dy tels que $\Delta = 0$.

Trouvons donc les directions particulières où Δ s'annule.

$$\Delta = A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2$$

Si l'on fait $\Delta = 0$ et qu'on divise par dx^2, on obtient après avoir posé:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$Ay'^2 - 2By' + C = 0$$

C'est une équation du second degré en y'. On a donc en général deux directions pour lesquelles le problème admet $\Delta = 0$

Pour simplifier le problème nous supposerons que A B.C ne sont fonctions que de x, y seulement

$$A = A(x,y) \qquad B = B(x,y) \qquad C = C(x,y)$$

(Le problème n'aurait pas eu une plus grande difficulté si A, B, C étaient fonctions de z aussi. Mais il aurait été assez difficile si A, B, C étaient aussi fonctions de p et q)

On ne fait aucune restriction sur F. On peut avoir

$$F = F(x, y, z, p, q)$$

Donc si l'on suppose $A = A(x,y)$ $B = B(x,y)$ $C = C(x,y)$ l'équation:

$$Ay'^2 - 2By' + C = 0$$

est une équation différentielle ordinaire du 1er ordre puisque l'on n'a que $y(x)$ dans l'équation et que: $y' = \frac{dy}{dx}$

Pour appliquer le théorème général d'existence de la solution on doit avoir y' d'une façon explicite (v. II° cahier p. 3). En calculant on a:

$$y' = \frac{B}{A} \pm \sqrt{\frac{B^2}{A^2} - \frac{C}{A}}$$

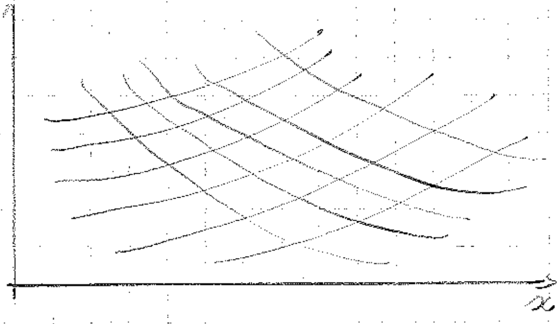
Puisque A, B, C sont des fonctions de x, y, on aura en général les deux solutions:

$$y' = \frac{B}{A} + \sqrt{\frac{B^2}{A^2} - \frac{C}{A}} = f_1(x,y)$$

$$y' = \frac{B}{A} - \sqrt{\frac{B^2}{A^2} - \frac{C}{A}} = f_2(x,y)$$

Ce sont deux équations différentielles distinctes.

Chacune des ces deux équations donne dans le plan de xy une famille de courbes de sorte que l'on a dans le plan x, y deux familles ou systèmes de courbes.



Ces courbes sont justement la projection de l'espace sur le plan x, y

Ces courbes n'existent que si y' existe. Pour ceci il faut regarder le discriminant de l'équation en y'. On a les 3 cas suivants

1°/ $\frac{B^2}{A^2} > \frac{C}{A}$ ou $B^2 > AC$: deux familles distinctes

Dans ce cas l'équation différentielle $Ar + 2Bs + Ct = F$ est dite: <u>hyperbolique</u>

2°/ $B^2 < AC$: pas de courbes ; on dit que dans ce cas l'équation est elliptique

3°/ $B^2 = AC$: une seule famille de courbes : on dit que l'équation est parabolique

Il faut remarquer que comme A, B, C sont fonctions de x et y il y a en général des domaines dans le plan x, y où l'équation est hyperbolique, d'autres où elle est elliptique et d'autres enfin où elle est parabolique.

Pour aborder l'étude des 3 cas ci-dessus nous allons traiter les exemples les plus simples qui sont les suivants :

1°/ $B = 0 \qquad A = 1 \qquad C = -1$

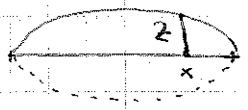
$B^2 - AC = +1 > 0$ donc cas hyperbolique.

L'équation différentielle devient dans ce cas :

$r - t = F$ ou $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F$$

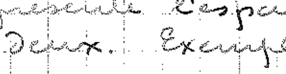
Les équations de ce genre se rencontrent en physique. En général dans ces équations les variables x et y ne sont pas du genre ; généralement x représente l'espace y le temps et z est une fonction des deux. Exemples :

- oscillations d'une corde fixée en ses extrémités



x = variable de position
z = amplitude
y = temps

- En électricité pour l'intensité du courant qui passe par un conducteur :



x = variable géométrique ou de position
z = intensité du courant
y = temps

(intensité = fonction de la position et du temps)

On appelle l'équation de ce genre une :

équation télégraphique

2°/ $B=0 \quad A=1 \quad C=1$

$B^2-AC = -1 < 0$ donc cas elliptique

L'équation différentielle devient :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F$$

a/ Si $F=0$ on obtient l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

On a vu dans les fonctions analytiques que les fonctions p et q de :

$$u = p(x,y) + i q(x,y)$$

satisfaisaient aux équations de Laplace :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = 0$$

(v. II^e Cah. p. 111)

Le potentiel en physique satisfait aussi à une telle équation aussi on appelle l'équation :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

équation de Laplace ou du potentiel

b/ Si $F = F(x,y)$ on obtient l'équation de Poisson qui joue aussi un rôle dans le potentiel

3°/ $B=0 \quad A=1 \quad C=0$

$B^2-AC=0$: cas parabolique

L'équation devient :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = F$$

On rencontre les équations de ce genre dans la conduction de la chaleur

x = position

z = température

y = temps.

En général: $F = F\left(x, y, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$

Mardi 23/4/1955

Etudions l'équation hyperbolique la plus simple:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Nous utiliserons la méthode d'intégration de Riemann

Cherchons d'abord les caractéristiques dans le plan xy. (ces courbes existent car nous traitons une équation hyperbolique)
L'équation de ces courbes était:

$$Ay'^2 - 2By' + C = 0$$

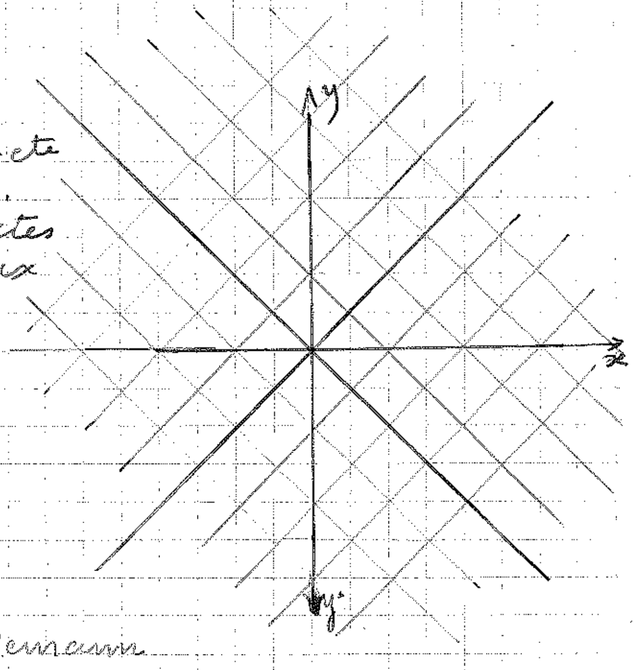
Dans notre exemple: $A = 1$ $B = 0$ $C = -1$
D'où:

$$y'^2 - 1 = 0$$
$$y' = \pm 1$$

On a donc les solutions:

$y = x + \text{const.}$; $y = -x + \text{cte}$

Ce sont les deux familles de droites respectivement parallèles aux droites: $y = x$ et $y = -x$.

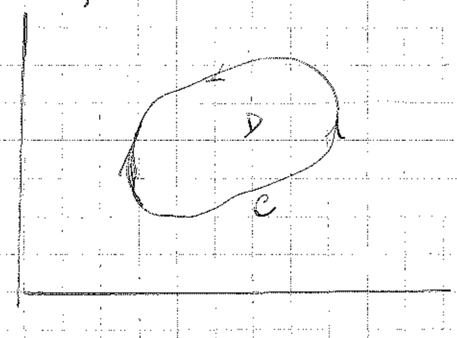


Voyons le rôle que jouent ces caractéristiques dans l'intégration.

A cet effet utilisons certaines formules de l'analyse formules de Riemann et de Green.

Considérons une courbe C fermée enfermant un domaine D. Soit $P(x, y)$ une fonction continue et uniforme dans D ainsi que sa dérivée:

$$\frac{\partial P}{\partial x}$$



La 1ère formule de Riemann nous dit que:

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{(C)} P\, dy$$

De même soit $Q(x,y)$ une fonction continue et uniforme dans D ainsi que sa dérivée :

$$\frac{\partial Q}{\partial y}$$

On a :

$$\iint_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{C} Q\, dx$$

(voir cours du   et du 1er Novembre 1954)

En combinant les deux égalités on a la formule de Green :

$$\iint_{(D)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_{(C)} P\, dy + Q\, dx$$

Nous appliquerons cette formule dans notre problème en choisissant P et Q de la manière suivante :

$$P = \frac{\partial z}{\partial x} \qquad Q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

D'où $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \qquad \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

Nous admettons donc que z possède au moins une dérivée de 1er et du 2e ordre ; ces dérivées étant de plus des fonctions continues.

On a donc :

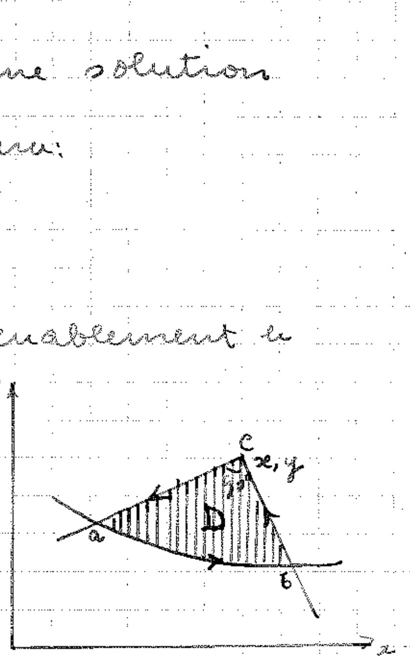
$$\iint_{D} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) dx\, dy = \int_{(C)} \frac{\partial z}{\partial x}\, dy + \frac{\partial z}{\partial y}\, dx$$

et comme $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ si z est une solution de l'équation différentielle on aura :

$$\int_{(C)} \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy = 0$$

Il faut maintenant déterminer convenablement le domaine D et la courbe C.

A cet effet nous utiliserons nos caractéristiques. Considérons donc dans le plan xy le domaine pour une caractéristique de chaque famille et une courbe telle qu'elle ne soit rencontrée en plus de ~~deux~~ un point par une caractéristique



Soit $c[x,y]$ le point de départ des caractéristiques

Posons pour simplifier:

$$\frac{\partial z}{\partial x} y' + \frac{\partial z}{\partial y} = Z$$

D'où $\frac{\partial z}{\partial x} dy + \frac{\partial z}{\partial y} dx = Z dx$

et par suite:

$$\int_{(C)} Z dx = 0$$

Mais puisque $C = abca$ on a que:

$$\int_{(C)} Z dx = \int_a^b Z dx + \int_b^c Z dx + \int_c^a Z dx = 0$$

Le long de bc on a: $y' = -1$

alors on peut écrire:

$$Z = -\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} y' = -\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} y'\right)$$

(on multiplie $\frac{\partial z}{\partial y}$ par y' qui est ~~...~~ -1 et on change de signe)

et $Z dx = -\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} y'\right) dx = -\left[\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right] = -dz$

différentielle totale

Donc: $\int_b^c Z dx = -\int_b^c dz = \int_c^b dz = z_b - z_c$

z_b = valeur de z au point b
z_c = valeur de z au point c

De même le long de ca $y' = +1$

On peut donc écrire:

$$Z = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$$

En multipliant $\frac{\partial z}{\partial y}$ par $y' = +1$ on a un: →

$$Z = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} y'$$

$$Z dx = dz$$

Donc $\int_c^a Z dx = \int_c^a dz = z_a - z_c$

z_a = valeur de z au point a.

On a donc $\int_a^b Z dx + z_b - z_c + z_a - z_c = \int_a^b Z dx + z_a + z_b - 2z_c = 0$

D'où l'on a:

$$z_c = \frac{1}{2}(z_a + z_b) + \frac{1}{2}\int_a^b \left(\frac{\partial z}{\partial x}dy + \frac{\partial z}{\partial y}dx\right)$$

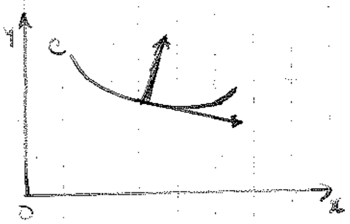
Mais $z_c = z(x,y)$ car les coordonnées du point c sont par hypothèse x et y. On a donc:

$$z(x,y) = \frac{1}{2}(z_a + z_b) + \frac{1}{2}\int_a^b \left(\frac{\partial z}{\partial x}dy + \frac{\partial z}{\partial y}dx\right)$$

On voit que si z_a, z_b, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ sont connues $z(x,y)$ est connu et on a ainsi la solution.

Comme ~~z_a~~ et ~~z_b~~ b sont sur la courbe ab on voit donc que si l'on connaît les valeurs de z le long de la courbe ab et les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ le long de la courbe on connaît la valeur de chaque z (point d'intersection de 2 caractéristiques de famille différentes)

Pour avoir $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ on peut faire les considérations suivantes:



On montre dans le cours de 1re année (voir partie des dérivées partielles) qu'une surface admet une ~~direction~~ dérivée dans toutes les directions. La dérivée dans une direction α est donnée par:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \cos\alpha \frac{\partial z}{\partial x} + \sin\alpha \frac{\partial z}{\partial y}$$

Si l'on coupe la surface par un plan parallèle à ~~l'axe~~ du plan xoy la tangente à la courbe obtenue donne la ~~dérivé~~ direction pour laquelle la dérivé $\frac{\partial z}{\partial l}$ s'annule et la normale donne la direction pour laquelle $\frac{\partial z}{\partial l}$ est maximum.

Nous voyons donc que la tangente à la courbe c donnera la direction où $\frac{\partial z}{\partial l}$ s'annule. Si nous appelons α_0 l'angle que fait la tangente à la courbe nous aurons

$$\cos\alpha_0 \frac{\partial z}{\partial x} + \sin\alpha_0 \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

Nous connaissons bien en chaque point α_0

D'autre part puisque la normale donne la direction où $\frac{\partial z}{\partial l}$ est maximum, nous aurons en désignant par $\frac{\partial z}{\partial n}$ la dérivée dans la direction normale, et en remarquant que pour $\frac{\partial z}{\partial n}$, $\alpha = \alpha_0 + \frac{\pi}{2}$ (normale ⊥ tang.)

$$\frac{\partial z}{\partial n} = - \sin\alpha_0 \frac{\partial z}{\partial x} + \cos\alpha_0 \frac{\partial z}{\partial y} \qquad (2)$$

De (1) et (2) on tire :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\partial z}{\partial n} \cos\alpha_0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial n} \sin\alpha_0$$

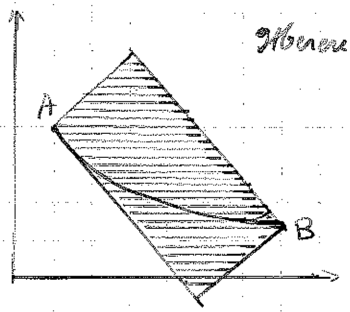
L'angle α_0 étant déterminé en chaque point par la tangente à la courbe il suffit donc pour avoir $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ que l'on donne $\frac{\partial z}{\partial n}$

On voit donc que pour avoir les valeurs de $z(x,y)$ en chaque point à partir de :

$$z(x,y) = \frac{1}{2}(z_a + z_b) + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial z}{\partial x} dy + \frac{\partial z}{\partial y} dx$$

il suffit de donner les valeurs de z en chaque point de la courbe et aussi les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial n}$ en chaque point de la courbe

Mercredi 10/4/19..



Soient A et B les extrémités de la courbe de départ. On a

$$z(x,y) = \frac{1}{2}(z_a + z_b) + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dx$$

Puisque les extrémités de la courbe sont A et B on voient que z_a et z_b ne sont déterminés que s'ils sont compris entre A et B. Par suite on voit que $z(x,y)$ n'est donné que dans le rectangle hachuré ci-dessus limité par les caractéristiques passant par A et B ceci avec la condition que l'on donne ~~A et B~~ z et $\frac{\partial z}{\partial n}$ le long de la courbe.

Montrons maintenant ceci:

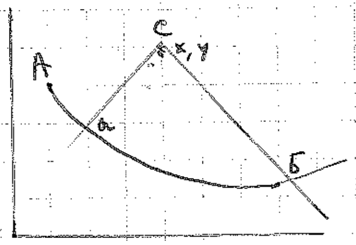
Si l'on se donne arbitrairement z et $\frac{\partial z}{\partial n}$ ou z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ le long de la courbe

l'expression :

$$z(x,y) = \frac{1}{2}(z_a + z_b) + \int_a^b \frac{\partial z}{\partial x}dy + \frac{\partial z}{\partial y}dx$$

est bien une solution de l'équation. En d'autres termes l'expression ci-dessus satisfait à l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$



Soit donc le point $C(x,y)$. Les deux caractéristiques passant par C coupent la courbe en a et b. Le point C varie avec x, y. Par suite les points a et b varient aussi. Donc z_a et z_b varient aussi avec x,y. De même $\int_a^b \frac{\partial z}{\partial x}dy + \frac{\partial z}{\partial y}dx$ qui est fonction de a et b variera aussi avec x, y car a et b varient.

Envisageons $2z(x,y)$ [si $z(x,y)$ est solution de l'équation $2z(x,y)$ l'est aussi et réciproquement : évident]

$$2z(x,y) = z_a + z_b + \int_a^b Z\,dx + \quad\quad Z = \frac{\partial z}{\partial x}y' + \frac{\partial z}{\partial y}$$

$2z(x,y)$ dépend donc de 3 quantités. Faisons une petite transformation pour $\int_a^b z\,dx$. Désignons par A une extrémité de la courbe. On peut écrire :

$$\int_a^b Z\,dx = \int_A^b Z\,dx - \int_A^a Z\,dx$$

Donc :

$$2z(x,y) = z_a + z_b + \int_A^b Z\,dx - \int_A^a Z\,dx$$

$2z(x,y)$ dépend maintenant de 4 quantités.

Montrons que chacune de ces quantités satisfait à l'équation différentielle. Par suite $2z$ le fera aussi

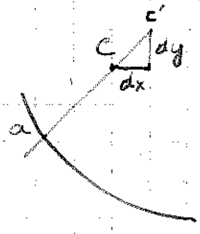
(En effet : $2z(x,y) = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$; en dérivant ~~2 fois~~ 2 fois par rapport à x et 2 fois par rapport à y et en retranchant membre à membre on a :

$$\frac{\partial^2(2z)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2(2z)}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}\right) + \cdots$$

on voit que si chaque différence $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2}$ est nulle il en est de même de $\frac{\partial^2 (2z)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 (2z)}{\partial y^2}$)

Posons donc puisque z_a, z_b } sont fonctions des x, y

$$2z(x,y) = Z_1(x,y) + Z_2(x,y) + Z_3(x,y) + Z_4(x,y)$$



1°/ Considérons $Z_1 = z_a$

z_a varie quand le point c se déplace. Déplaçons donc le point c. Considérons une variation dx de l'abscisse x. Si nous prenons un $dy = dx$ nous voyons que puisque ca est incliné à 45° que le point c' $(x+dx, y+dy)$ se trouvera sur le prolongement de ac. Donc le point a n'aura pas changé et par suite z_a. Mais on a:

$$dZ_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x} dx + \frac{\partial z_1}{\partial y} dy$$

Comme $dx = dy$ et dans ce cas comme z_1 ne varie pas, $dz_1 = 0$ et alors:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} dx + \frac{\partial z_1}{\partial y} dx = 0$$

ou $$\frac{\partial z_1}{\partial x} = - \frac{\partial z_1}{\partial y}$$

Dérivons les 2 côtés une fois par rapport à x et une fois par rapport à y. On obtient

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 z_1}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}$$

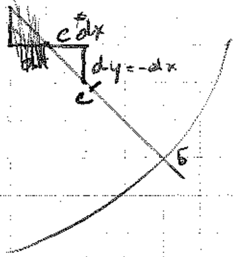
On en déduit puisque $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z_1}{\partial y \partial x}$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} = 0$$

Ainsi Z_1 satisfait bien à l'équation

2°/ Considérons $Z_2 = z_b$.

z_b varie avec c. Mais on peut faire varier c



de manière que b ne varie pas.
A cet effet il suffit de prendre un dx quelconque et un dy égal à $-dx$

On obtient le point c' situé toujours sur cb
(cb incliné à 45°)

On aura donc :

$$\frac{\partial Z_2}{\partial x}\,dx - \frac{\partial Z_2}{\partial y}\,dx = 0$$

$$\frac{\partial Z_2}{\partial x} = \frac{\partial Z_2}{\partial y}$$

On en déduit facilement comme pour Z_1.

$$\frac{\partial^2 Z_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Z_2}{\partial y^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 Z_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Z_2}{\partial y^2} = 0$$

3°/ $Z_3 = \int_A^b Z\,dx$

Z_3 varie seulement avec b car le point A est fixe.
Alors on peut faire varier c de façon que b reste invarié et on aura comme pour le 2°/

$$\frac{\partial Z_3}{\partial x} = \frac{\partial Z_3}{\partial y} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 Z_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Z_3}{\partial y^2} = 0$$

4°/ $Z_4 = -\int_A^a Z\,dx$

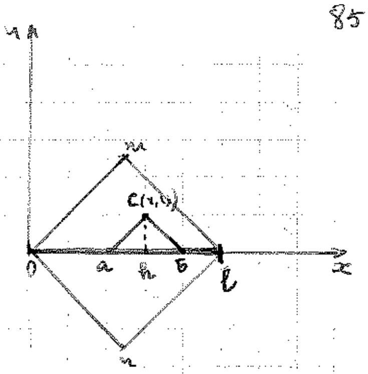
Ne varie qu'avec a. Mais c peut varier de manière que a reste fixe. On en déduit comme pour le 1°/.

$$\frac{\partial Z_4}{\partial x} = -\frac{\partial Z_4}{\partial y}$$

et par suite $$\frac{\partial^2 Z_4}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Z_4}{\partial y^2} = 0$$

Nous voyons donc que Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 satisfont à l'équation. Par suite $2Z(x,y)$ satisfait aussi et il en est de même de $z(x,y)$.

Donc $z(x,y)$ est bien une solution.



Exemple

Supposons que la courbe soit une partie de l'axe Ox:

Ol

C'est le problème des vibrations d'une corde. x désignera la position
y le temps
z = l'amplitude

Nous traitons pour le moment le problème sans considérer les fait physiques. Nous devons donner z le long de Ol. Supposons que ce soit la fonction:

$$z(x,0) = f(x) \qquad \text{pour } 0<x<l$$

Nous devons connaître aussi $\frac{\partial z}{\partial n}$ le long de Ol. Ici la direction n est la direction des y. Aussi supposons donné:

$$\frac{\partial z(x,0)}{\partial y} = g(x) \qquad 0<x<l$$

Ici on a donc le cas particulier où $\frac{\partial z}{\partial y}$ est donné en chaque point.
Quant à $\frac{\partial z}{\partial x}$ il se déduit de $z(x,0) = f(x)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x) \qquad 0<x<l$$

Tout d'abord on peut remarquer qu'on n'aura la solution que dans le carré $Onlm$. (puisque O et l sont les points extrêmes).

Considérons donc un point c de ce carré: $c(x,y)$
Menons par le point c les deux caractéristiques qui coupent l'axe des x en a et b.
Déterminons z_a et z_b. A cet effet il faut connaître les abscisses de a et b.
Mais il est facile de voir sur la figure que:

$$\overline{oa} = \overline{oh} - \overline{ah} \qquad ; \qquad \overline{ob} = \overline{oh} + \overline{hb}$$

Mais à cause de l'inclinaison de 45° on a:

$$ah = hb = hc = y \qquad \text{et comme} \quad \overline{oh} = x$$

on a donc:

$$\overline{Oa} = x-y \qquad ; \qquad \overline{Ob} = x+y$$

Par suite
$$z_a = z[(x-y),0] = f(x-y)$$
$$z_b = z[(x+y),0] = f(x+y)$$
} à partir de: $z(x,0) = f(x)$

En appliquant la formule

$$z(x,y) = \frac{1}{2}(z_a + z_b) + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial z}{\partial y}dx + \frac{\partial z}{\partial x}dy$$

après avoir remarqué que le long de ol y est constant et par suite $dy=0$, nous aurons:

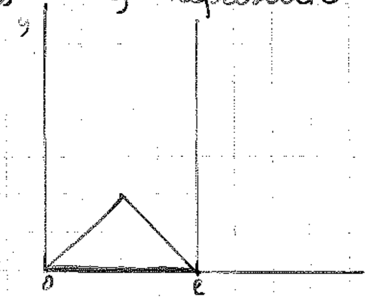
$$z(x,y) = \frac{1}{2}f(x-y) + \frac{1}{2}f(x+y) + \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} g(x)\,dx$$

Cette expression donne z pour tous les points du carré omnl.

Jeudi 11/4/1935

On a vu que z était défini dans tous les points du carré. Mais reprenons le problème physique.

$z(x,y)$ donnant les élongations, y représente le temps. On voit donc que l'on peut faire varier y de 0 à $+\infty$; par suite on veut avoir aussi les valeurs de z non seulement dans le carré mais dans toutes la lame d'épaisseur ol limitée par l'axe des x de 0 à l et par la droite indéfinie Oy (temps toujours positif).



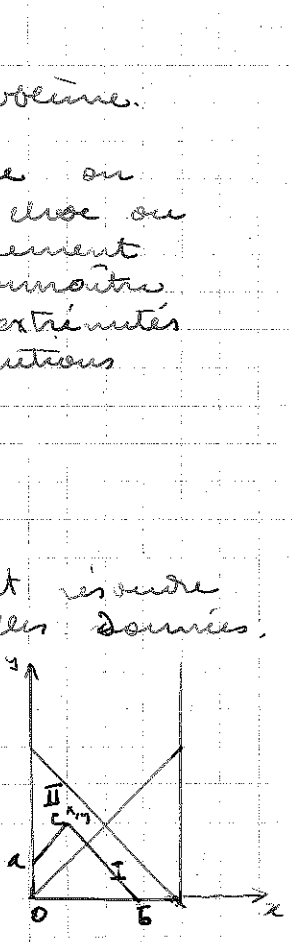
Voyons donc comment on peut résoudre le problème.

Remarquons qu'au point de vue mécanique on peut faire vibrer la corde soit par un choc ou milieu soit en bougeant verticalement les extrémités 0 et l. Il faut donc connaître en chaque instant le mouvement des extrémités 0 et l. Par suite on doit donner les fonctions

$$z(0,y) = h(y)$$

$$z(l,y) = K(y)$$

Voyons maintenant comment on peut résoudre le problème entièrement avec ces nouvelles données.



Considérons un point du domaine II : $c(x,y)$

Menons par c les deux caractéristiques ca et cb.

On connaît z_b par $z(x,0) = f(x)$

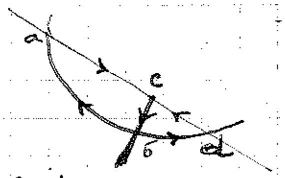
On connaît z_a par $z(0,y) = K(y)$

mais on ne peut avoir la solution pour deux raisons

1°/ On ne connait pas $\frac{\partial z}{\partial x}$ le long de Oa.

2°/ La courbe aob est rencontrée en plus de 1 point par une caractéristique.

Examinons ces faits par un complément à la théorie



Considérons donc la courbe C qui est rencontrée en deux points par une caractéristique.
Nous ne pourrons appliquer le théorème.
Seulement il y a à remarquer qu'il doit y avoir une relation entre les deux points a et d.
Cherchons cette relation.
Soit c(x,y) un point de ad. Faisons passer par c l'autre caractéristique, qui coupe alors ad en b
Nous pourrons appliquer le théorème pour la partie ab de la courbe car en cette partie la courbe n'est pas rencontrée en 2 points par une caractéristique
Il en est de même pour la partie bd. On exprimera donc de deux manières la valeur de z au point c.
En égalant ces deux valeurs on aura la relation

On aura donc pour bd :

$$2z(x,y) = z_b + z_d + \int_b^d Z\,dx \qquad Z = \frac{\partial z}{\partial x} y' + \frac{\partial z}{\partial y}$$

De même pour ba en remarquant que l'on va dans le sens ba afin que cb soit parcouru une fois.

$$2z(x,y) = z_a + z_b + \int_b^a Z\,dx$$

D'où en égalant on obtient:

$$z_d - z_a + \int_b^d Z\,dx - \int_b^a Z\,dx = 0$$

$$z_d - z_a + \int_b^d Z\,dx + \int_a^b Z\,dx = 0$$

$$z_d - z_a + \int_a^d Z\,dx = 0$$

Remarquons que:

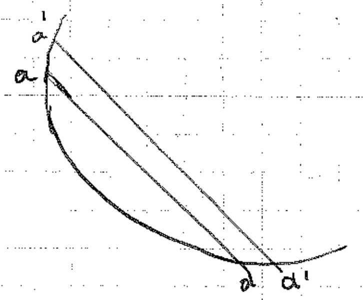
$$z_d - z_a = \int_a^d dz = \int_a^d \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

D'où:

$$\int_a^d \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy + \int_a^d \frac{\partial z}{\partial x}dy + \frac{\partial z}{\partial y}dx = 0$$

$$\int_a^d \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy + \frac{\partial z}{\partial x}dy + \frac{\partial z}{\partial y}dx = 0$$

ou $$\int_a^d \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right)(dx+dy) = 0$$



C'est la relation cherchée.

Comme ~~$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$~~ cette relation est juste pour tous les points de même nature que a et d on peut l'écrire pour les points a' et d' :

$$\int_{a'}^{d'} \left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)(dx+dy) = 0$$

D'où : $$\int_{a'}^{d'}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)(dx+dy) - \int_a^d \left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)(dx+dy) = 0$$

En d'autres termes l'intégrale le long de $aa' + dd'$ est nulle.

On peut rapprocher indéfiniment le point a' du point a et le point d' du point d. La différence ci-dessus donnera la différence des éléments différentiels de sorte que l'on aura :

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right]_a (dx+dy)_a - \left[\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right]_d (dx+dy)_d = 0 \qquad (1)$$

Mais remarquons que puisque a et d sont sur la même droite à 45° on aura pour ces deux points :

$$y = -x + K$$

Pour les points a' et d' on a :

$$y_1 = -x_1 + K_1$$

D'où :

$$-y+y_1 = -(x_1-x) + K_1 - K$$

Si on rapproche le point a' de a et le point d' de d on voit que :

$$y_1 - y = dy \qquad x_1 - x = dx \qquad K_1 - K = dK$$

$$dy + dx = dK$$

aussi bien pour a et a', que pour d et d'

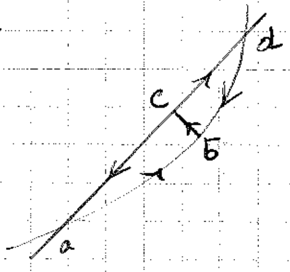
Par suite on voit que :

$$(dx+dy)_a = (dx+dy)_d$$

D'où l'on a en divisant (1) par $dx + dy$:

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right]_a = \left[\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right]_d$$

C'est la nouvelle forme de la relation



Si l'on a une courbe qui rencontre une caractéristique de l'autre système en deux points on fait un raisonnement identique.

Il faut prendre les sens de parcours convenablement : de a à b sens positif comme dans le cas général. On aura :

$$z_a + z_b + \int_a^b Z\,dx = z_d + z_b + \int_d^b Z\,dx$$

ou $$z_d - z_a + \int_d^b Z\,dx - \int_a^b Z\,dx = 0$$

ou $$z_d - z_a - \int_b^d Z\,dx - \int_a^b Z\,dx = 0$$

ou $$z_d - z_a - \int_a^d Z\,dx = 0$$

Soit : $$\int_a^d dz - \int_a^d Z\,dx = 0$$

$$\int_a^d \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy - \int_a^d \frac{\partial z}{\partial x}dy + \frac{\partial z}{\partial y}dx = 0$$

$$\int_a^d \frac{\partial z}{\partial x}dx - \frac{\partial z}{\partial y}dx - \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)dy = 0$$

$$\int_a^d \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)(dx - dy) = 0$$

On aura donc par un même raisonnement :

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right]_a \left[dx-dy\right]_a = \left[\left[\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right]_d (dx-dy)\right]_d$$

Mais $(dx-dy)_a = (dx-dy)_d$

En effet $y = x + K$ $\qquad dx = dy + dK$

$dx - dy = dK$ pour tous les points de $\overline{ad}$

Donc $$\left[\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right]_a = \left[\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right]_d$$

On peut démontrer autrement les deux relations

Démontrons la seconde par exemple. On a trouvé

$$I = \int_a^d \left(\frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial t}{\partial y}\right)(dx - dy) = 0$$

Supposons que l'équation de la courbe $\mathcal{C}$ soit

$$y = \lambda(x)$$

L'équation de ad est : $y = x + K$.

Les points a et d sont obtenus par l'intersection de ad avec c ; par suite les abscisses de a et d sont données par :

$$x + K = \lambda(x)$$

Soient x_1 et x_2 les deux abscisses ; on a :

$$x_1 + K = \lambda(x_1)$$

$$x_2 + K = \lambda(x_2)$$

On voit que les abscisses de a et d sont fonctions de K.

On peut écrire :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial t}{\partial y}\right)\left(1 - \frac{dy}{dx}\right) dx = 0$$

L'expression à intégrer est indépendante de K. Seulement l'intégrale dépend de K par x_1 et x_2.

Dérivons donc I par rapport à K d'après les règles connues :

si $G(K) = \int_m^n f(x)\,dx \qquad m = m(K) \quad n = n(K)$

$$G'_K(K) = f(n)\,n'_K - f(m)\,m'_K + \int_m^n f'_K(x)\,dx$$

Remarquons que chez nous $f'_K = 0$ car dans notre cas f' ne dépend pas du paramètre.

On a donc en posant $\left(\frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial t}{\partial y}\right)\left(1 - \frac{\partial y}{\partial x}\right) = \varphi(x)$

$$\frac{dg}{dk} = \varphi(x_2)\, x_2' - \varphi(x_1)\, x_1' = 0$$

Mais $\quad x_2' = \lambda'_{x_2} \cdot x_2' - 1$

$$x_2' = \frac{1}{\lambda'_{x_2} - 1}$$

De même

$$x_1' = \frac{1}{\lambda'_{x_1} - 1}$$

D'autre part:

$$\varphi(x_2) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x_2} \left(1 - \frac{dy}{dx}\right)_{x_2}$$

Mais: $\quad y = \lambda(x) \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \lambda'(x)$

On aura par suite que:

$$\varphi(x_2)\, x_2' = \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x_2} \left(1 - \lambda'_{x_2}\right) \cdot \frac{1}{\lambda'_{x_2} - 1} = -\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x_2}$$

De même:

$$\varphi(x_1)\, x_1' = -\left[\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right]_{x_1}$$

Donc:

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right]_{x_2} = \left[\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right]_{x_1}$$

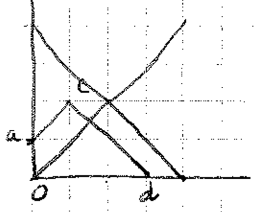
on aurait pu dire la même chose pour les ordonnées aussi de a et d. Par suite:

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right]_{a} = \left[\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right]_{d}.$$

Voyons maintenant la manière de résoudre notre problème

au point d toutes les dérivées sont connues:

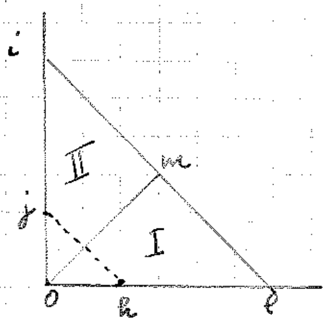
$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = g(x)$$



au point c $\quad \frac{\partial z}{\partial x}$ est inconnue

Mais $\frac{\partial z}{\partial y}$ est connue à partir de $z(0,y) = h(y)$. Seulement

on ne connait pas ceci en fonction de x. Voici un moyen d'avoir toutes les dérivées sur la partie oi de l'axe des y.



Soit un un point de Ol : h

Prenons le symétrique de h par rapport à om. On obtient le point γ

On connait : $z(0,y) = h(y)$

D'où : $\frac{\partial z(0,y)}{\partial y}$ $h'(y)$

Mais comme $y_\gamma = x_h$ ~~pour~~ on a que :

$$\frac{\partial z(0,y)}{\partial y} = h'(x)$$

ainsi $h'(x)$ donne la dérivée en chaque point de oi

Nous connaissons au point j :

$$\frac{\partial z}{\partial y}$$

au point h : $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$: $f(x)$ $g(x)$

De la relation :

$$\left[\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x}\right]_h = \left[\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right]_\gamma$$

nous déduisons $\frac{\partial z}{\partial x}$ pour le point h. On écrira en posant $\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_h = f_1(x)$:

$$h'(x) + f_1(x) = f'(x) + g(x)$$

D'où : $f_1(x) = f'(x) + g(x) - g_1(x)$

On a donc la $\frac{\partial z}{\partial x}$ pour tous les points de oi

On connait donc tout ce qui est nécessaire pour avoir les valeurs de z dans le domaine II

Lundi 15/4/1935

Nous avons vu que dans le domaine I on avait en chaque point z par la formule :

$u(x,y) = f(x-y) + f(x+y) + \int_{x-y}^{x+y} g(x)\,dx$ ou

(1) $u(x,y) = f(x-y) + f(x+y) + \int_{x-y}^{x+y} g(\alpha)\,d\alpha$

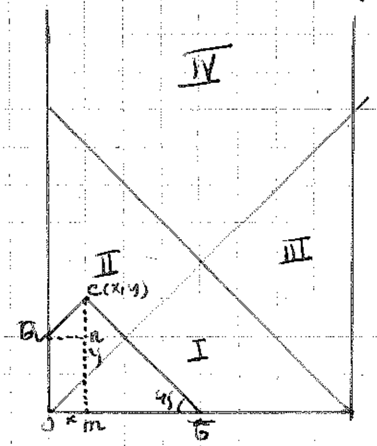
Cherchons à déterminer les solutions dans les autres domaines : II, III et IV.

A cet effet appelons :

$$\frac{\partial z(0,y)}{\partial x} = h_1(y)$$

$$\frac{\partial z(l,y)}{\partial x} = k_1(y)$$

ce sont des fonctions qui ne sont pas pas données (ne sont données que :



$z(x,0) = f(x)$; $\frac{\partial z(x,0)}{\partial y} = g(x)$, $z(0,y) = h(y)$; $z(l,y) = k(y)$]

Il faudra calculer ces fonctions. Nous le ferons dans la suite du cours.

Considérons un point $c(x,y)$ du domaine II. Comme toujours menons les caractéristiques passant par ce point. Nous prendrons comme courbe C l'axe des x + axe des y. D'où les points a et b. Cherchons les coordonnées de ces points :

à cause de l'angle de 45° on a : $cm = mb$; par suite :

$$\overline{Ob} = x+y$$

De même il est facile de voir que :

$$\overline{Oa} = \overline{mn} = \overline{mc} - \overline{nc} = y - \overline{an} = y - x$$

Appliquons la formule :

$$u(x,y) = z_a + z_b + \int_a^b Z\,dx = z_a + z_b + \int_a^b \frac{\partial z}{\partial x}dy + \frac{\partial z}{\partial y}dx$$

Ici : $z_b = f(x+y)$

$z_a = h(y-x)$

$$\int_a^b Z\,dx = \int_a^0 Z\,dx + \int_0^b Z\,dx$$

De a à 0 x est constant donc $dx = 0$ et $\frac{\partial z(0,y)}{\partial x} = h_1(y)$

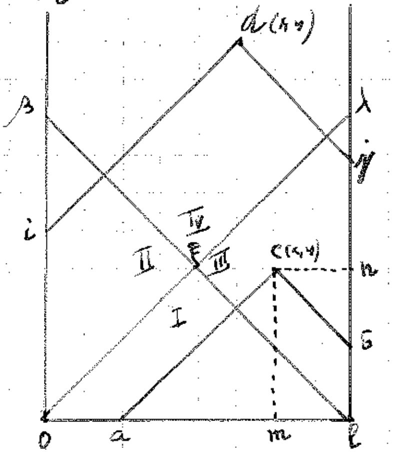
De 0 à b $y = c^{te}$ donc $dy = 0$ et $\frac{\partial z(x,0)}{\partial y} = g(x)$

D'où:

$$z(x,y) = h(y-x) + f(x+y) + \int_0^{x+y} g(\alpha)\,d\alpha + \int_{y-x}^{0} h_1(\alpha)\,d\alpha \quad \text{ou}$$

$$(2)\quad z(x,y) = h(y-x) + f(x+y) + \int_0^{x+y} g(\alpha)\,d\alpha - \int_0^{y-x} h_1(\alpha)\,d\alpha$$

Cette formule donne z dans le domaine II.



Arrivons au domaine III

On a le point $c(x,y)$, a et b.
Calculons les coordonnées de ces points.

$$\overline{oa} = \overline{om} - \overline{am} = \overline{om} - \overline{mc} = x - y$$

$$\overline{\ell b} = \overline{\ell n} - \overline{bn} = \overline{\ell n} - \overline{cn} = \overline{\ell n} - (\overline{o\ell} - \overline{om})$$

$$\overline{\ell b} = \overline{\ell n} - \overline{o\ell} + \overline{om} = y - \ell + x$$

$$\int_a^b Z\,dx = \int_a^\ell \frac{\partial z}{\partial y}\,dx + \int_\ell^b \frac{\partial z}{\partial x}\,dy$$

$$= \int_{x-y}^{\ell} g(\alpha)\,d\alpha + \int_\ell^{y-\ell+x} k_1(\alpha)\,d\alpha$$

D'où on a pour le domaine III la formule:

$$(3)\quad z(x,y) = f(x-y) + k(y-\ell+x) + \int_{x-y}^{\ell} g(\alpha)\,d\alpha + \int_\ell^{y-\ell+x} k_1(\alpha)\,d\alpha$$

Enfin pour le domaine IV on aura au point $d(x,y)$

$$z(x,y) = z_i + z_j + \int_i^j Z\,dx$$

$\overline{oi} = y - x$
$\overline{\ell j} = y - \ell + x$
$z_i = h(y-x)$ comme dans domaine II
$z_j = k(y-\ell+x)$ comme dans domaine III

$$\int_i^j Z\,dx = \int_i^0 \frac{\partial z(0,y)}{\partial x}\,dy + \int_0^\ell \frac{\partial z(x,0)}{\partial y}\,dx + \int_\ell^j \frac{\partial z(\ell,y)}{\partial x}\,dy$$

$$= \int_{y-x}^{0} h_1(\alpha)\,d\alpha + \int_0^\ell g(\alpha)\,d\alpha + \int_\ell^{y-\ell+x} k_1(\alpha)\,d\alpha$$

$$= -\int_0^{y-x} h_1(\alpha)\,d\alpha + \quad " \quad + \quad "$$

D'où: $(4)\quad z(x,y) = h(y-x) + k(y-\ell+x) + \int_0^\ell g(\alpha)\,d\alpha + \int_\ell^{y-\ell+x} k_1(\alpha)\,d\alpha - \int_0^{y-x} h_1(\alpha)\,d\alpha$

On a ainsi les valeurs de z pour tous les domaines

Seulement il faut faire les restrictions suivantes.

Les formules (1), (2), (3) (4) ne sont exactes que pour

$$0 \leq x \leq l$$

De plus en remarquant que les équations des droites $O\lambda$ et $l\beta$ sont respectivement:

$$x-y=0 \qquad \text{et} \qquad x+y-l=0$$

on a que:

1°/ la formule (1) n'est valable que pour le domaine I c'est-à-dire analytiquement par le domaine:

$$x-y \geq 0 \qquad x+y-l \leq 0 \qquad y \geq 0 \qquad \text{(triangle } O\xi l\text{)}$$

2°/ la formule (2) n'est valable que pour le domaine II c'est-à-dire pour:

$$x-y \leq 0 \qquad x+y-l \leq 0 \qquad x \geq 0 \qquad \text{(triangle } O\xi\beta\text{)}$$

3°/ La formule (3) n'est valable que pour le domaine III c'est-à-dire

$$x-y \geq 0 \qquad x+y-l \geq 0 \qquad x \leq l \qquad \text{(triangle } l\xi\lambda\text{)}$$

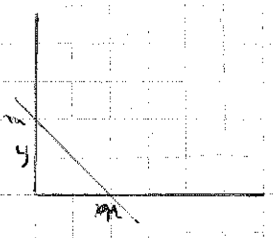
4°/ Enfin pour la formule (4) on a le domaine infini IV:

$$x-y \leq 0 \qquad x+y-l \geq 0 \qquad 0 \leq x \leq l$$

Aussi quand on se donne x et y il faut voir lesquelles des inégalités ci-dessus sont vérifiées et appliquer la formule en rapport.

Toutefois le problème n'est pas encore solutionné complètement: il y a encore les fonctions h_1 et k_1 qui sont indéterminées pour le moment. Calculons les. A cet effet nous appliquerons la relation trouvée pour deux points situés sur une caractéristiques

1/ Calculons $h_1(y)$



Puisque m et n sont sur la même caractéristique on a:

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right]_m = \left[\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right]_n$$

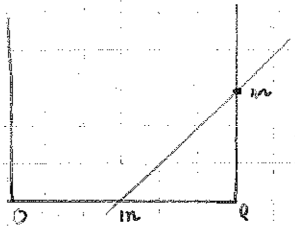
$$h_1(y) + h'(y) = g(y) + f'(y)$$

[on fait $x=y$ car le p^t n a pour abscisse y

Comme h', g, f sont connus on voit que :

$$h_1(y) = g(y) + f'(y) - h'(y)$$

Mais ceci seulement pour $y \leq l$ car au delà $g(y)$ et $f(y)$ ne sont pas connus. $(x \geq l)$



2°/ Pour une caractéristique de l'autre système on a :

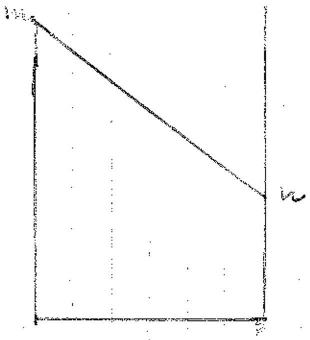
$$\left[\frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial t}{\partial y}\right]_m = \left[\frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial t}{\partial y}\right]_n$$

$$k_1(y) - k'(y) = f'(l-y) - g(l-y)$$ [car si $ln = y$, $\overline{om} = ol - ml$, $x = l - y$]

$$k_1(y) = f'(l-y) + k'(y) - g(l-y)$$

Mais toujours pour :

$$y \leq l$$



3°/ Considérons le cas $y \geq l$

Pour une caractéristique parallèle à la 1° bissectrice on aura :

$$\left[\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y}\right]_m = \left(\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y}\right)_n$$

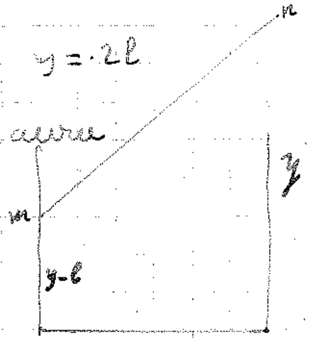
$$h_1(y) + h'(y) = k_1(y-l) + k'(y-l)$$ car l'abscisse de n est $y-l$

or $k_1(y-l)$ est connu pourvu que :

$$y - l \leq l$$
$$y \leq 2l$$

On a donc le moyen d'avoir $h_1(y)$ jusqu'à $y = 2l$

4°/ comme caractéristique de l'autre système on aura



$$\left[\frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial t}{\partial y}\right]_n = \left[\frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial t}{\partial y}\right]_m$$

$$k_1(y) - k'(y) = h_1(y-l) - h'(y-l)$$

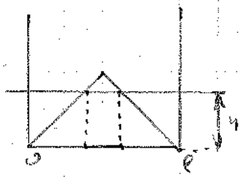
on voit que $k_1(y)$ est connu pour :

$$y \leq 2l$$

On peut ainsi calculer k_1 et h_1 pour des intervalles que l'on veut.

De cette façon on a résolu le problème complètement

Le problème a une signification physique bien déterminée c'est le problème de la propagation des ondes
On peut en avoir une idée. Dans la formule qui donne $z(x,y)$ dans le domaine I on voit que h_1 et k_1 ne rentrent pas. Ainsi pour certaines valeurs limitées de y (de temps) z ne dépend pas de h_1 et k_1



Après un certain temps on voit que la longueur de vibration diminue et il arrive un instant où elle s'annule. Tout dépend alors du mouvement des extrémités 0 et l. On voit donc qu'il y a propagation du mouvement des extrémités vers l'intérieur.

A l'aide des équations (1), (2), (3), (4) on a le moyen d'avoir $z(x,y)$ c'est-à-dire le mouvement en chaque point du rectangle infini, c'est-à-dire en chaque instant.

Remarque

On voit que dans chacune des formules (1), (2), (3), (4) rentrent $x+y$ et $x-y$. On peut tirer un résultat très simple de ce fait par la solution générale dite de d'Alembert:

$$z = \varphi(x+y) + \psi(x-y)$$

φ et ψ étant des fonctions arbitraires mais dérivables. On peut voir que z ainsi défini satisfait à l'équation. En effet:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(x+y)\cdot\frac{\partial(x+y)}{\partial x} + \psi'(x-y)\,\frac{\partial(x-y)}{\partial x}$$

$$= \varphi'(x+y).1 + \psi'(x-y).1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \varphi''(x+y).1^2 + \psi''(x-y).1^2 = \varphi''(x+y) + \psi''(x+y)$$

D'autre part:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(x+y).1 + \psi'(x-y).-1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \varphi'(x+y).1^2 + \varphi''(x-y).(-1)^2 = \varphi''(x+y) + \psi''(x-y)$$

on voit bien que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

C'est la solution la plus générale. Mais elle n'empêche pas que pour trouver la solution aux conditions initiales que nous nous sommes données nous soyons obligés de faire les mêmes calculs que précédemment

---

Mardi, 16 I 1935

Equation elliptique:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

C'est l'équation du potentiel ou de Laplace

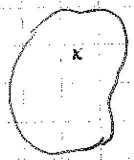
Nous savons que dans ce cas les caractéristiques ne sont pas réelles (ce seraient les droites $x \pm iy = 0$)
Aussi on ne peut employer la méthode de Laplace traitée pour $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

On pourrait appliquer le problème de Cauchy (on donne une courbe et les dérivées le long) Mais on n'a pas une solution d'intérêt pratique

Il y a principalement deux problèmes dont les solutions satisfont à l'équation.

1°/ Le problème électrostatique ou problème de Dirichlet

C'est le suivant : étant données les valeurs de z le long d'un contour enfermant un certain domaine, trouver les valeurs de z à l'intérieur de ce domaine qui satisfont à l'équation différentielle



2°/ Le problème hydrodynamique ou de Neumann

C'est le suivant :

Nous ne traiterons que le problème de Dirichlet

Nous démontrerons le théorème de Riemann :

Etant donné un contour quelconque, le problème de Dirichlet admet toujours une solution pour ce contour.

Pour déterminer effectivement la solution, il y a différentes méthodes :
des méthodes se basant exclusivement sur l'analyse réelle
des méthodes utilisant certaines données physiques du potentiel
des méthodes utilisant l'analyse complexe.

Nous emploierons la dernière méthode.

Traitons le cas spécial où le contour est un cercle.

Nous supposons donc données les valeurs sur la circonférence ; il s'agit de trouver les valeurs à l'intérieur.
Remarquons que maintenant nous devons employer les notations de l'analyse complexe.
Comme nous avons posé toujours dans l'analyse complexe que la variable complexe était z
et comme nous avons à faire dans l'équation différentielle à une ~~variable~~ fonction réelle il vaut mieux écrire que l'équation est :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0$$

Supposons donc que l'on donne les valeurs de p le long du cercle par :

$$p = f(\theta) \quad \text{fonction continue}$$

Soit donc $z = x + iy$ et soit la fonction analytique

$$u(z) = p(x,y) + i\,q(x,y)$$

La partie réelle et la partie imaginaire de la fonction u satisfont à l'équation différentielle puisque u(z) est une fonction analytique (v. II^e Cahier p. 116)

Nous cherchons donc la partie réelle (p(x,y)) d'une fonction analytique étant donnée la partie réelle de cette fonction le long du contour d'un domaine (circonférence dans notre exemple). C'est là l'énoncé général du problème de Dirichlet exprimé en analyse complexe.

Cherchons donc la solution dans le cas d'un cercle. Partons de la formule de Cauchy (v. II^e Cahier p. 175)

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{u(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

qui donne les valeurs de z à l'intérieur d'un domaine si l'on connaît les valeurs de z sur le contour.

Nous cherchons justement les parties réelles des deux membres. Aussi il faut trouver une méthode pour éliminer les parties imaginaires.

Puis ξ est la valeur de z sur le contour nous aurons dans notre exemple du cercle :

$$\xi = Re^{i\vartheta}$$

d'après les notations bien connues des nombres complexes
D'où :

$$d\xi = iRe^{i\vartheta}\, d\vartheta = i\xi\, d\vartheta$$

et nous avons alors l'intégrale définie :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(\xi)\,\xi}{\xi - z}\, d\vartheta$$

car le cercle entier est parcouru.

D'autre part nous savons que si la fonction à intégrer est continue dans le domaine, l'intégrale de Cauchy s'annule (v. p. 163) II° cah.).

Si nous prenons donc z convenablement de manière que la fonction :

$$\frac{\xi\, u(\xi)}{\xi - z}$$

soit continue c'est-à-dire si $z \neq \xi$, dans nous aurons que l'intégrale s'annule.

Mais puisque z est à l'intérieur du cercle :

$$|z| < R$$

Si nous prenons :

$$z = z_1 = \frac{R^2}{\bar{z}} \qquad (\text{p}^t \text{ inverse de } \bar{z})$$

on aura sûrement

$$|z_1| > R \qquad \text{c'est-à-dire que l'on sera hors}$$

du cercle. En effet :

$$|z_1| = \frac{R^2}{|\bar{z}|}$$

Mais $|\bar{z}| = |z|$. D'où :

$$|z_1| = \frac{R^2}{|z|}$$

$|z|$ étant $< R$ (pour le z à l'intérieur du cercle) on voit que le point z_1 nouvellement choisi sera à l'extérieur du cercle car $|z_1| > R$.

On aura alors que :

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\mu(\xi)}{\xi - \frac{R^2}{z}} d\xi$$

ou $$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\xi \, d\theta}{\xi - \frac{R^2}{z}} \mu(\xi)$$

Mais on peut écrire :

$$\mu(\xi) = p_\theta + i q_\theta$$

p_θ et q_θ étant les valeurs de p et q sur la circonférence

D'où :

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\xi \, d\theta}{\xi - \frac{R^2}{z}} (p_\theta + i q_\theta)$$

Si cette expression s'annule la valeur conjuguée de cette expression s'annule. Cherchons donc la conjuguée de cette expression : il suffit d'y faire $i \to -i$ et d'écrire pour chaque nombre complexe son conjugué.

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{\xi} \, d\theta}{\bar{\xi} - \frac{R^2}{z}} (p_\theta - i q_\theta)$$

$(\overline{(\bar{z})} = z)$

Mais $\xi \bar{\xi} = R^2$ D'où :

$$\bar{\xi} = \frac{R^2}{\xi}$$

Par suite : $$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{R^2}{\xi} \, d\theta}{\frac{R^2}{\xi} - \frac{R^2}{z}} (p_\theta - i q_\theta)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z}{z - \xi} (p_\theta - i q_\theta) \, d\theta$$

ou $$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-z}{\xi - z} (p_\theta - i q_\theta) \, d\theta$$

D'autre part :

$$\mu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\xi}{\xi - z} (p_\theta + i q_\theta) \, d\theta$$

En retranchant la 2e égalité de la 1ère on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\xi+z}{\xi-z}\,p_\theta\,d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\xi-z}{\xi-z}\,q_\theta\,d\theta = -0 + u(z)$$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\xi+z}{\xi-z}\,p_\theta\,d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} q_\theta\,d\theta = u(z)$$

Nous cherchons la partie réelle de $u(z)$. Or dans l'expression de $u(z)$ la 2e intégrale est purement imaginaire car q_θ est une valeur réelle. Il s'ensuit qu'on peut négliger cette intégrale dans la recherche de la partie réelle de $u(z)$. On aura donc :

$$p(x,y) = \text{P. R. (partie réelle) } u(z) = \text{P.R. } \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\xi+z}{\xi-z}\,p_\theta\,d\theta$$

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\text{P.R}\left[\frac{\xi+z}{\xi-z}\right]p_\theta\,d\theta$$

Mais $p_\theta = f(\theta)$ car on donne les valeurs de p le long de la circonférence. D'où

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\text{P.R.}\left[\frac{\xi+z}{\xi-z}\right]f(\theta)\,d\theta$$

Evaluons cette partie réelle. A cet effet on peut écrire :

$z = re^{i\varphi}$ $\quad$ r et φ = coordonnées polaires de z

D'où en se rappelant que :

$$\xi = Re^{i\theta}$$

on a en multipliant la fraction $\frac{\xi+z}{\xi-z}$ par $\frac{\bar\xi-\bar z}{\bar\xi-\bar z}$ (afin d'avoir un dénominateur réel).

$$\frac{\xi+z}{\xi-z} = \frac{(\xi+z)(\bar\xi-\bar z)}{(\xi-z)(\bar\xi-\bar z)} = \frac{\xi\bar\xi - z.\bar z + z\bar\xi - \xi\bar z}{(\xi-z)(\bar\xi-\bar z)}$$

Mais : $\quad \xi\bar\xi = R^2 \qquad z\bar z = r^2$

$$(\xi-z)(\bar\xi-\bar z) = |\xi-z|^2$$

D'où :

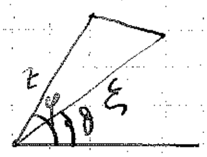
$$\frac{\xi+z}{\xi-z} = \frac{R^2-r^2+(z\bar\xi-\xi\bar z)}{|\xi-z|^2} = \frac{R^2-r^2}{|\xi-z|^2} + \frac{z\bar\xi-\xi\bar z}{|\xi-z|^2}$$

Or $z\bar\xi$ et $\xi\bar z$ sont conjugués ; par suite leur différence est un nombre purement imaginaire

$(a+bi - (a-bi) = 2bi)$

Comme R^2 et r^2 sont réels on voit que la partie réelle celle de:

$$\frac{\xi+z}{\xi-z}$$



est
$$\frac{R^2-r^2}{|\xi-z|^2}$$

Mais $|\xi-z|$ égale le 3e côté du rectangle triangle construit sur z et ξ

$$|\xi-z|^2 = R^2+r^2 - 2Rr\cos(\varphi-\theta)$$

D'où.

$$p(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)} f(\theta)\,d\theta$$ = Intégrale de Poisson

C'est la solution avec

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

Mercredi 17/4/1935

Reprenons l'intégrale de Poisson. Posons.

$$N(r,\varphi;\theta) = \text{P.R.}\left[\frac{\xi+z}{\xi-z}\right] = \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)}$$

en supposant que R est une constante.

D'où:

$$p(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r,\varphi;\theta)\, f(\theta)\,d\theta \qquad (1)$$

$N(r,\varphi;\theta)$ est dit le noyau de l'intégrale ci-dessus

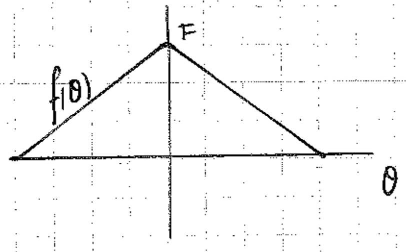
En exprimant p de cette manière nous n'avons pas résolu le problème mais nous avons simplement démontré qu'en supposant qu'une solution existe il y a la relation (1) entre les valeurs sur le contour et les valeurs à l'intérieur.

Il y a justement une difficulté en traitant le problème direct : il faut que la solution de l'équation

$$\Delta p \equiv \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=0$$

soit au moins dérivable deux fois afin que cette

Or on a supposé $f(\theta)$ continue. Il peut cependant arriver que $f(\theta)$ ne possède pas de dérivée par exemple la fonction suivante:
de 0 à π on prend des $f(\theta)$ croissants
de $\pi < \theta < 2\pi$ $f(\theta)$ décroît. Au point F il n'y a pas de dérivée.



On voit donc que par

$$p(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r,\varphi;\theta)\, f(\theta)\, d\theta$$

on entend une solution du problème mais de la façon suivante:

Théorème

Etant donnée une fonction $f(\theta)$ continue, il existe toujours une fonction satisfaisant à l'équation différentielle $\Delta p = 0$ pour les valeurs intérieures au cercle et dont les valeurs sur un rayon ont pour limite la valeur donnée sur le cercle. Cette fonction est donnée par l'intégrale de Poisson

Montrons donc que:

1°) L'expression

$$p(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r,\varphi;\theta)\, f(\theta)\, d\theta)$$

vérifie l'équation différentielle

En effet cette intégrale dépend de x, y en r et φ. Les limites de cette intégrale étant constantes on peut différentier les deux membres pour les points à l'intérieur du cercle seulement car pour les points sur la circonférence l'intégrale n'est pas régulière puisque en ces points:

$$\xi - z \quad \text{s'annule}$$

Donc pour les points à l'intérieur on a:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \Delta p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta N(r,\varphi;\theta)\, f(\theta)\, d\theta \qquad \text{pour } r < R$$

Mais N est la partie réelle d'une fonction analytique:

$$\text{P.R.}\ \frac{\xi + z}{\xi - z} \qquad (\text{puisque } r < R \text{ c'est bien une fonction analytique})$$

Donc N satisfait à l'équation

$$\Delta N = 0$$

caractéristique de la fonction analytique

Par suite si $\Delta N = 0$ $\Delta p = 0$ et la 1ère partie du théorème est démontrée.

2°/ Démontrons la seconde partie. A cet effet nous considérons les 3 propriétés fondamentales du noyau

I – Le noyau est positif pour tous les points à l'intérieur du cercle.

Ceci est immédiat car on a $r < R$ et

$$N = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta)}$$

le numérateur est positif et le dénominateur est un carré $|\zeta - z|^2$ (v.p.)

II. – $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, \varphi; \theta)\, d\theta = 1$$ pour chaque valeur de r et φ

Considérons $I = \int_0^{2\pi} N(r, \varphi; \theta)\, d\theta$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta)}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)}\, d\theta$$

$$I = (R^2 - r^2)\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(R^2 + r^2) - 2Rr\cos(\theta - \varphi)}$$

c'est une intégrale du type:

$$\int \frac{d\alpha}{a + b\cos\alpha}$$

avec $a = R^2 + r^2$
$b = -2Rr$

On peut l'intégrer par la substitution en $tg\, \alpha/2$. On obtient puisque $a > b$ $[R^2 + r^2 > -2Rr]$

$$\int \frac{d\alpha}{a + b\cos\alpha} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\, tg\, \alpha/2\right) + C^{te}$$

Mais $a^2 - b^2 = (R^2 + r^2)^2 - 4R^2r^2 = (R^2 - r^2)^2$

$$\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = \sqrt{\frac{R^2 + r^2 + 2Rr}{R^2 + r^2 - 2Rr}} = \frac{R + r}{R - r}$$

D'où:

$$I = (R^2 - r^2)\left[\frac{2}{R^2 - r^2} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{R + r}{R - r}\, tg\, \frac{\theta - \varphi}{2}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$I = 2\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{R+r}{R-r}\,tg(\pi-\varphi/2)\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{R+r}{R-r}\,tg-\varphi/2\right)\right]$$

Mais: $\frac{R+r}{R-r}\,tg(\pi-\varphi/2) = \frac{R+r}{R-r}\,tg-\varphi/2$

car $tg(\pi-\varphi/2) = tg-\varphi/2 = -tg\,\varphi/2$

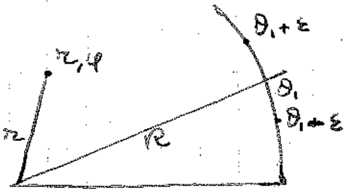
Donc $\operatorname{arctg}\left[\frac{R+r}{R-r}\,tg(\pi-\varphi/2)\right]$ et $\operatorname{arctg}\left(\frac{R+r}{R-r}\,tg-\varphi/2\right)$ sont des angles qui ont même tangente. Ils diffèrent donc de π et par suite:

$$I = 2\pi$$

D'où: $$\int_0^{2\pi} N(r,\varphi;\vartheta)\,d\vartheta = 2\pi$$

ou $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r,\varphi;\vartheta)\,d\vartheta = 1$$

III $$\lim_{\substack{r\to R\\ \varphi\to\theta_1}} \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} N(r,\varphi;\vartheta)\,d\theta = 1$$

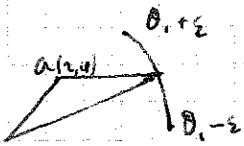


C'est-à-dire que quand le point (r,φ) coïncide avec le point θ_1 la limite de l'intégrale prise entre les limites $\theta_1-\varepsilon$ et $\theta_1+\varepsilon$ est 1.
(Ceci paraît étrange car on a vu que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\,d\theta$ est 1 pour toute la circonférence. Nous voulons démontrer qu'il en est de même pour un petit arc)

Si nous montrons que le long de toute la circonférence excepté l'arc $\theta_1-\varepsilon$, $\theta_1+\varepsilon$ l'intégrale est nulle puisque le long de tout le cercle l'intégrale est 1, on aura que l'intégrale le long de $\theta_1-\varepsilon$ et $\theta_1+\varepsilon$ sera 1.

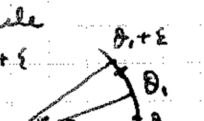
Considérons:

$$N = \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)}$$



Si $R\to r$ le numérateur de la fraction s'annule. Mais comme on est en dehors de l'arc $\theta_1-\varepsilon, \theta_1+\varepsilon$ on aura que:

$$\varphi-\theta_1 \geq \varepsilon$$



Par suite le dénominateur de N ne s'annule pas car la distance $a\theta_1$ ne peut s'annuler

$$(a\theta_1)^2 = R^2+r^2 - 2Rr\cos(\varphi-\theta_1)$$

On a donc que pour tous les points extérieurs à l'arc $\theta_1-\varepsilon, \theta_1+\varepsilon$
$N=0$ et par suite.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} N\,d\theta = 0 \quad \text{pour tous les points extérieurs}$$

et ainsi puisque $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\,d\theta = 1$ on aura que:

$$\lim_{\substack{r\to R\\ \varphi\to\theta_1}} \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} N(r,\varphi;\theta)\,d\theta = 1$$

Jeudi 18/4/1935

A partir des 3 propriétés du Noyau nous devons démontrer que soit:

$$p(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r,\varphi;\theta) f(\theta)\,d\theta$$

si $r\to R$ et $\varphi\to\theta_1$, $p(r,\varphi)\to f(\theta_1)$

En effet on a d'après la 1^re^ propriété:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r,\varphi;\theta)\,d\theta = 1$$

Multiplions les deux membres par la constante $f(\theta_1)$ on aura:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r,\varphi;\theta)\,f(\theta_1)\,d\theta = f(\theta_1)$$

<u>Remarque</u>
Ajoutons une remarque sur les noyaux. Nous voyons d'après la dernière égalité que les noyaux sont des fonctions qui transforment une fonction en une autre et dans le cas où cette fonction est une constante, le noyau permet de retrouver la même constante)

Calculons la différence : $p(r,\varphi) - f(\theta_1)$.

$$p(r,\varphi) - f(\theta_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r,\varphi;\theta)\left[f(\theta) - f(\theta_1)\right]d\theta$$

Nous savons que N est positif. Nous pouvons donc écrire en nous servant de la propriété que la valeur absolue d'une intégrale est inférieure ou égale à l'intégrale des valeurs absolues:

$$\left|p(r,\varphi) - f(\theta_1)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r,\varphi;\theta)\left|f(\theta) - f(\theta_1)\right|d\theta$$

on écrit N tel quel car $N>0$

Mais on peut décomposer l'intégrale en deux parties:

$$\left|p(r,\varphi) - f(\theta_1)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1-\frac{\delta}{2}}^{\theta_1+\delta/2} N(r,\varphi,\theta)\left|f(\theta)-f(\theta_1)\right| d\theta + \int_{\text{reste de l'arc}} \left|N(r,\varphi,\theta)\right| \quad |d\theta$$

On peut écrire:

$$\left|p(r,\varphi) - f(\theta_1)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\overbrace{\left|f(\theta)-f(\theta_1)\right|_{max}}^{A}\int_{\theta_1-\delta/2}^{\theta_1+\delta/2} N(r,\varphi;\theta)\,d\theta$$

dans intervalle $\theta_1-\delta/2 < \theta < \theta_1+\delta/2$

$$+\frac{1}{2\pi}\overbrace{\left|f(\theta)-f(\theta_1)\right|_{max}}^{B}\left[1-\int_{\theta_1-\delta/2}^{\theta_1+\frac{\delta}{2}} N(r,\varphi;\theta)\,d\theta\right]$$

dans le restant de l'arc

Si nous utilisons la propriété III du noyau que

$$\lim \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1-\delta/2}^{\theta_1+\delta/2} N\,d\theta = 1$$

nous aurons certains résultats.
Tout d'abord remarquons que la différence A peut être rendue aussi petite qu'on veut

$$A < \varepsilon$$

car on a supposé $f(\theta)$ continue. D'ailleurs le maximum de cette différence dans l'intervalle:

$$\theta_1-\delta/2 \quad , \quad \theta_1+\delta/2$$

est inférieur à ε car on peut prendre δ aussi petit qu'on veut. Donc on a bien

$$A<\varepsilon$$

Quand à la différence B, remarquons qu'elle n'est pas inférieure à ε ! C'est une constante.

En utilisant maintenant la 3e propriété du noyau nous voyons que puisque B n'est pas 0 que:

$$\left|p(r,\varphi) - f(\theta_1)\right| \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire que l'on a bien

$$p(r,\varphi) \to f(\theta_1)$$

si $f(\theta_1)$ est une fonction continue.

c.q.f.d.

Remarque
on suppose $f(\theta)$ continue mais non dérivable
p est une fonction dérivable au moins deux fois

Méthode pour évaluer les intégrales donnant p

Rappelons que l'on avait défini le noyau ainsi:

$$N = P.R\left[\frac{\xi + z}{\xi - z}\right] \quad \text{où} \quad \xi = Re^{i\theta} \; ; \; z = re^{i\varphi}$$

On peut écrire:

$$N = P.R \frac{1 + \frac{z}{\xi}}{1 - \frac{z}{\xi}}$$

Or $\left|\frac{z}{\xi}\right| < 1$ car ξ indique les valeurs sur la circonférence. On peut donc par suite développer la fraction en série géométrique

$$N = P.R\left\{\left(1+\frac{z}{\xi}\right)\left(1 + \frac{z}{\xi} + \frac{z^2}{\xi^2} + \cdots\right)\right\}$$

$$N = P.R.\left[1 + 2\frac{z}{\xi} + 2\frac{z^2}{\xi^2} + 2 \cdots\cdots\right\}$$

$$N = 1 + 2.P.R.\left[\frac{z}{\xi} + \frac{z^2}{\xi^2} + \cdots\right]$$

Evaluons la partie réelle de $\frac{z^v}{\xi^v}$

On peut écrire en remplaçant ξ^v par: $\frac{R^{2v}}{\bar{\xi}^v}$

puisque: $\xi^v \bar{\xi}^v = (\xi\bar{\xi})^v = (R^2)^v = R^{2v}$,

$$\frac{z^v}{\xi^v} = \frac{z^v \bar{\xi}^v}{R^{2v}}$$

Mais $z = re^{i\varphi}$; Donc $z^v = r^v e^{iv\varphi}$ et

$\bar{\xi} = Re^{-i\theta}$; donc $\bar{\xi}^v = R^v e^{-iv\theta}$

Donc:

$$\frac{z^v}{\xi^v} = \frac{r^v e^{iv\varphi} \cdot R^v e^{-iv\theta}}{R^{2v}} = \frac{r^v}{R^v} e^{iv\varphi - iv\theta}$$

$$\frac{z^\nu}{\xi^\nu} = \frac{z^\nu}{R^\nu} e^{i(\nu\varphi-\nu\theta)} = \frac{z^\nu}{R^\nu}\left(\cos(\nu\varphi-\nu\theta) + i\sin(\nu\varphi-\nu\theta)\right)$$

On voit donc que:

$$\text{P.R.}\ \frac{z^\nu}{\xi^\nu} = \frac{r^\nu}{R^\nu}\cos(\nu\varphi-\nu\theta)$$

$$= \frac{z^\nu}{R^\nu}(\cos\nu\varphi\cos\nu\theta + \sin\nu\varphi\sin\nu\theta)$$

D'où l'on voit que:

$$N = 1 + 2\frac{r}{R}(\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta) + \frac{2r^2}{R^2}(\cos2\varphi\cos2\theta + \sin2\varphi\sin2\theta)$$
$$+ \dots \frac{r^k}{R^k}(\cos k\varphi\cos k\theta + \sin k\varphi\sin k\theta) + \dots$$

On a donc trouvé un développement permettant d'évaluer l'intégrale de Poisson

24/4/1935

En utilisant le développement de la leçon précédente on peut écrire:

$$p(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N f(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}(\cos n\varphi\cos n\theta + \sin n\varphi\sin n\theta)\right]f(\theta)d\theta$$

La série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}(\cos n\varphi\cos n\varphi + \sin n\varphi\sin n\theta)$ est convergente puisque $\frac{r}{R} < 1$. Si l'on suppose que

$$r \leq R_1 < R$$

on peut dire que la série est uniformément convergente et on peut alors opérer l'intégration terme à terme. On aura:

$$p(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}\left[\int_0^{2\pi}\cos n\varphi\cos n\theta\, f(\theta)d\theta + \sin n\varphi\sin n\theta\, f(\theta)d\theta\right]$$

Comme l'intégration n'est à effectuer que par rapport à θ on peut faire sortir les φ de l'intérieur de l'intégrale et on aura:

$$p(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n}\left[\cos n\varphi \int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\,d\theta + \sin n\varphi \int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta\,d\theta\right]$$

Mais $\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\,d\theta$ et $\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta\,d\theta$ sont des constantes dépendant de n. Posons donc:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\,d\theta$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta\,d\theta$$

En remarquant que pour $n=0$ on a:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta \qquad \text{car} \qquad \cos n\theta = 1$$

$$b_0 = 0 \qquad \text{car} \qquad \sin n\theta = 0$$

D'où l'on voit que l'on peut écrire après avoir remplacé $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta$ par $\frac{a_0}{2}$:

$$p(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \frac{r}{R}(a_1\cos\varphi + b_1\sin\varphi) + \frac{r^2}{R^2}(a_2\cos 2\varphi + b_2\sin 2\varphi) + \dots$$

On a ainsi exprimé la solution sous forme d'un développement.

Il faut remarquer que l'on doit avoir toujours $f(\theta)$ continue.

a_n et b_n sont dits les coefficients de Fourier de $f(\theta)$.

<u>Remarque</u>

On serait tenté de faire dans le développement ci-dessus $r=R$. La première partie devient

$$p(R,\varphi)$$

et comme on a supposé que $p(R,\theta) = f(\theta)$ (valeurs sur la circonférence)

on voit que $p(R,\varphi) = f(\varphi)$

La 2e partie devient:

$$\frac{a_0}{2} + (a_1\cos\varphi + b_1\sin\varphi) + \dots$$

En général on ne pourra pas écrire que $f(\varphi)$ égale ce développement car en général on n'a pas le droit de faire $r=R$. Si ceci est possible on dit que la fonction f est développable en série de Fourier.

On peut voir dans la théorie des séries de Fourier que la continuité d'une fonction ne suffit pas pour que cette fonction soit développable en série de Fourier. Donc généralement on ne peut écrire que $f(\varphi)$ égale le développement relatif.

Nous avons donc trouvé la solution de l'équation $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0$ quand le domaine est enfermé par un cercle. Il faut trouver maintenant les valeurs de p satisfaisant à l'équation, à l'intérieur d'un domaine quelconque quand on donne les valeurs de la fonction sur le contour. Pour arriver à ceci nous appliquerons certaines conséquences tirées du cas spécial où le contour est un cercle.

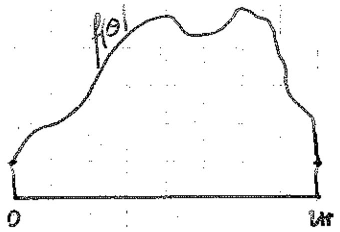
Nous avons trouvé dans ce cas que :

$$p(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{R}(r\cos\varphi + b_1 \sin\varphi) + \cdots$$

Si l'on fait $r=0$ c'est-à-dire que l'on cherche la valeur de p au centre du cercle d'où que :

$$p(r=0) = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta$$

Mais $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta$ est une valeur moyenne de la fonction $f(\theta)$.



En effet considérons la fonction $f(\theta)$ entre 0 et 2π. Tout d'abord remarquons que :

$$f(0) = f(2\pi)$$

puisque, après avoir parcouru un tour de 2π on arrive au même point sur le cercle.

D'autre part : $\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta$ indique l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses et limitée par les deux verticales en 0 et 2π. Si nous divisons cette aire par 2π nous obtenons une certaine longueur :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta$$

qui multipliée avec 2π donne l'aire ci-dessus. C'est-à-dire que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta$$

est le second côté du rectangle de base 2π et dont l'aire est équivalente à l'aire citée plus haut.
Il s'ensuit donc que cette hauteur est bien une hauteur moyenne afin que l'équivalence puisse avoir lieu (pleins et vides en dessus et en dessous compensés)
Donc $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta$ est bien une valeur moyenne

de $f(\theta)$: c'est-à-dire une valeur qui ne surpasse pas le maximum et qui est supérieure au minimum.
Si donc la valeur au centre est une valeur moyenne de $f(\theta)$, sûrement nous aurons que sur la ~~centre~~ circonférence il y aura une valeur supérieure et une valeur inférieure à cette valeur moyenne (excepté si φ est une constante; alors on aurait la même valeur partout)

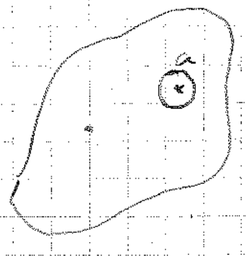
On voit donc que si φ n'est pas une constante les valeurs maximum ~~de φ~~ ~~nés~~ et minimum de φ ne sont pas au centre du cercle mais sur la circonférence

Nous déduisons de ce fait le théorème suivant:

__Théorème__

Etant donné un domaine quelconque, si la fonction solution de l'équation n'est pas une constante, le maximum et le minimum de la fonction se trouvent sur le contour du domaine et pas à l'intérieur.

En effet supposons qu'un point du domaine soit une valeur extrême de la fonction. Nous pouvons tracer un cercle autour de ce point contenu dans le domaine. D'après ce que nous avons dit ci-dessus, il est possible de trouver sur le cercle un point qui soit supérieur ou inférieur au centre a. Par suite, le point a n'est plus un point extrême ce qui est justement contraire à notre hypothèse. Il y a donc contradiction et le point a ne peut être un point extrême. On peut recommencer le même raisonnement pour tous les points du domaine; on a en conclusion que ces points ne peuvent être des points extrêmes. Donc les points extrêmes sont sur le contour.



c. q. f. d.

__Conséquence__

Si la fonction est nulle le long du contour, elle est nulle dans tout le domaine: la seule solution est 0
En effet les valeurs sur le contour comprenant les points extrê

mes, il s'ensuit que le minimum et le maximum est 0 et par suite la fonction est identiquement 0.

Théorème

Soit un domaine limité par une courbe C. Si les valeurs de la fonction sont données sur le contour, il y a une seule solution dans le domaine D qui satisfasse à l'équation et qui prenne les valeurs données pour chaque point du contour.

(Nous n'indiquons pas la solution mais nous disons que si elle existe, elle est unique)

Soit une solution:

$p(r, \varphi)$ qui prenne sur le contour les valeurs:

$$p_c = f$$

Supposons qu'il existe une seconde solution

$p_1(r, \varphi)$ qui satisfasse à l'équation et qui prenne aussi sur le contour les valeurs données

$$p_{1c} = f$$

Si p et p_1 sont solutions de l'équation, leur différence est aussi une solution car l'équation différentielle est linéaire et homogène. On a donc une autre solution:

$$p_2(r, \varphi) = p(r, \varphi) - p_1(r, \varphi)$$

Cette fonction prendra sur le contour les valeurs:

$$p - p_{1c} = 0 \quad \text{car} \quad p = p_{1c} = f$$

Or si les valeurs sur le contour sont 0, il s'ensuit que p_2 est identiquement 0 et par suite

$$p(r, \varphi) = p_1(r, \varphi)$$

ce qui démontre le théorème.

25/4/1935

Nous avons vu qu'étant données les valeurs d'une fonction sur le contour d'un domaine, il existe une seule solution qui satisfasse à l'équation de Laplace et qui donne les valeurs en chaque point de domaine, et qui de plus prend sur le contour les valeurs données.

Soient une suite de fonctions :

$$f_1, f_2 \dots$$

représentant les valeurs sur le contour et soient les solutions correspondants à chacune d'elle.

$$p_1, p_2, \dots$$

Théorème

Si la suite des fonctions $f_1, f_2 \dots$ tend vers une limite f la suite $p_1, p_2 \dots$ tend vers une limite p qui est la solution correspondante à f.

En effet, le fait que la suite $f_1, f_2 \dots$ tend vers f peut s'exprimer mathématiquement par.

$$|f_n - f| < \varepsilon$$ pour n suffisamment grand, ε étant un nombre donné.

Soit p la solution correspondante à f. Examinons la différence $p_n - p$. Cette différence est une solution de l'équation car p_n et p sont des solutions

La solution $p_n - p$ prendra sur les contours les valeurs :

$$f_n - f$$

Mais $$|f_n - f| < \varepsilon$$ ou

$$-\varepsilon < f_n - f < \varepsilon$$

C'est-à-dire que le maximum de $f_n - f$ est inférieur à ε et le minimum supérieur à $-\varepsilon$.

Examinons la différence $p_n - p$. Nous savons d'après le théorème de la p. 113 que le maximum de cette différence se trouve sur le contour. C'est justement le maximum de $f_n - f$; on sait que ce maximum est compris entre $-\varepsilon$ et ε ; il en est de même du minimum

Donc $p_n - p$ a ses valeurs extrêmes comprises entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$ par suite :

$$-\varepsilon < p_n - p < \varepsilon$$

ou

$$|p_n - p| < \varepsilon$$

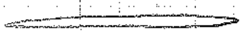
ce qui montre que p est bien la limite de la suite $p_1 \dots p_n \dots$ c.q.f.d.

Nous laissons pour le moment l'étude de l'équation de Laplace que nous reprendrons plus tard et nous passons à un nouveau chapitre :

Calcul des variations (éléments)

Le calcul des variations est la généralisation des problèmes des maximum et minimum.
Ainsi par exemple l'un des problèmes classiques du calcul des variations est le suivant :
On donne une courbe fermée de longueur constante enfermant une certaine aire. On demande de déformer la courbe de façon que l'aire ainsi enfermée soit maximum.

Il est évident que l'aire a un maximum car la courbe étant limitée, elle ne peut enfermer une aire infinie. De plus on peut en étirant la courbe rendre cette aire nulle ou presque.



On voit donc bien que cette aire est une certaine fonction prenant toutes les valeurs de 0 au maximum de l'aire.

Si nous comparons ce problème avec le problème simple ~~d'une~~ de la recherche du maximum d'une fonction nous voyons immédiatement la différence.
Dans le second problème on cherche directement le maximum d'une fonction donnée.
Dans le 1er problème on cherche une fonction (forme de la courbe) maximum d'une fonction donnée ou que l'on peut calculer à partir d'une autre (aire du domaine).
C'est là le problème de l'isopérimétrie.

Nous verrons que chaque problème du calcul des variations comporte la solution d'une équation différentielle. Nous y rencontrerons l'équation de Laplace. Nous traiterons ceci avec plus de détails. Auparavant

introduisons un supplément à la théorie des maximum et minimum.

Soit une fonction de deux variables: $f(x,y)$. ~~Proposons~~ Nous savons que nous obtiendrons les valeurs extrêmes de la fonction:

$$f(x,y) = \text{extr.}$$

en résolvant les équations:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Soit un problème nouveau: calculer $f(x,y) = \text{extr.}$ dans le cas où x et y sont liés par une relation:

$$\varphi(x,y) = 0$$

Evidemment on se dirait dans ce cas que l'on a alors pour $f(x,y)$ une équation à une seule variable car on pourrait éliminer une variable entre $f(x,y)$ et $\varphi(x,y)=0$ (par exemple x). Seulement nous supposerons cette élimination ~~et nous tâ~~ non possible et nous tâcherons de résoudre le problème dans ce cas.

Supposons que l'on calcule y en fonction de x: $y = y(x)$ à partir de $\varphi(x,y)=0$. Dans ce cas $f(x,y)$ est une fonction de x seulement ~~et ses~~ ses valeurs extrêmes s'obtiennent en dérivant totalement f par rapport à x. Ce sera:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Mais nous avons dit que l'on ne peut tirer y en fonction de x et par suite on ne peut tirer directement $\frac{dy}{dx}$ de $y = y(x)$. Mais en dérivant totalement $\varphi(x,y)=0$ on obtient:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

D'où:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

et alors on a la condition:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = 0$$

qui n'est autre chose que:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

On peut écrire au lieu de cette équation les deux équations simultanées

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

L'élimination de λ entre les deux équations donne l'équation ci-dessus.

On voit donc que pour avoir

$f(x,y) = \text{extr}$ avec $\varphi(x,y) = 0$ en sus

il suffit de considérer les maximum et minimum de la fonction

$$f(x,y) + \lambda\, \varphi(x,y)$$

En effet les conditions sont:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f + \lambda\varphi) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f + \lambda\varphi) = 0$$

qui ne sont autre chose que les 2 équations simultanées ci-dessus.

29/4/1935

Nous avons vu que pour trouver:

$$f(x,y) = \text{extr} \qquad \text{avec} \qquad \varphi(x,y) = 0$$

il suffit de trouver

$$f_1(x,y) = f(x,y) + \lambda\, \varphi(x,y) = \text{extr.}$$

c'est-à-dire de résoudre:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$$

On a là 2 équations à 3 inconnues: x, y, λ
Mais il faut remarquer que l'on a aussi:

$$\varphi(x,y) = 0,$$

On a ainsi 3 équations à 3 inconnues. On peut tirer de là x et y.

Les mêmes considérations ont lieu pour un nombre quelconque de variables.

Exemples:

I– Soit à trouver le maximum de:

$$f = x^2 y^2 z^2$$

sous la condition que $x^2+y^2+z^2 = c^{te} = c^2$ ou

$$\varphi(x,y,z) \equiv x^2+y^2+z^2-c^2 = 0$$

Appliquons la théorie.

$$f_1(x,y,z) = x^2y^2z^2 + \lambda(x^2+y^2+z^2-c^2)$$

Les conditions nécessaires d'un maximum sont:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2xy^2z^2 + 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 2x^2yz^2 + 2\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = 2x^2y^2z + 2\lambda z = 0$$

On voit tout d'abord qu'on a les solutions

$$x = y = z = 0$$

Il est facile de voir qu'elles correspondent à un minimum
En effet pour $x=0$ par exemple

$$f(x,y,z) = 0$$

Or f est une fonction essentiellement positive
donc 0 est bien une valeur minimum.

En supprimant cette solution qui est triviale on a les équations:

$$y^2z^2 + \lambda = 0$$
$$x^2z^2 + \lambda = 0$$
$$x^2y^2 + \lambda = 0$$

On en tire en éliminant λ:

$$x^2y^2 = x^2z^2 = y^2z^2$$

ou en ne tenant pas compte de la solution $x=y=z=0$.

$$x^2 = y^2 = z^2$$

Nous avons aussi la relation

$\varphi(x,y,z) \equiv x^2+y^2+z^2-c^2=0$

D'où l'on a :

$$x^2=y^2=z^2=\frac{c^2}{3}$$

ou $$x=y=z=\pm\frac{c}{\sqrt{3}}$$

On a ainsi en combinant les signes plusieurs solutions. On peut voir facilement sans recourir aux conditions supplémentaires pour que l'on ait un maximum (dérivée seconde...)

D'abord le minimum est 0 on l'a vu. De plus comme la somme

$$x^2+y^2+z^2=c^2$$

est finie, x^2, y^2 et z^2 ne peuvent avoir des valeurs infinies et par suite le produit

$$f=x^2y^2z^2$$

est fini et il a par suite une valeur maximum. C'est la valeur ci-dessus : $x^2=y^2=z^2=\frac{c^2}{3}$

alors :

$$f_{max}=\left(\frac{c^2}{3}\right)^3$$

D'où on a que :

$$x^2y^2z^2 \leq \left(\frac{c^2}{3}\right)^3$$

ou en extrayant les racines cubiques des 2 membres :

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leq \frac{c^2}{3} = \frac{x^2+y^2+z^2}{3}$$

Donc $$\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leq \frac{x^2+y^2+z^2}{3}$$

Or $\frac{x^2+y^2+z^2}{3}$ est la moyenne arithmétique de x^2; y^2; z^2

$\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$ est la moyenne géométrique de x^2; y^2; z^2

On tire la conclusion suivante :

La moyenne géométrique de 3 nombres est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique

Le théorème est général et s'applique pour un nombre

quelconque de variables :

$$\sqrt[n]{x_1^2 x_2^2 x_3^2 \cdots x_n^2} \leq \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2 \cdots + x_n^2}{n}$$

(Dans la démonstration ci-dessus on peut voir facilement que le nombre de variables n'a pas d'importance)

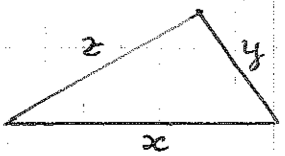
Remarque

On a pris le produit $f = x^2y^2z^2$ afin d'avoir des variables positives car dans le cas contraire on ne peut extraire la racine d'un nombre négatif

2/ De tous les triangles de même périmètre, lequel a-t-il son aire maximum ?

Soient x, y, z les côtés du triangle

Nous avons la relation :



$$x+y+z = cte = 2p$$

ou $$x+y+z-2p \equiv \varphi = 0$$

D'autre part on sait que l'aire d'un triangle exprimée en fonction des 3 côtés est :

$$f = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$$

On cherche le maximum de f. On peut chercher le maximum de f^2.

$$f^2 = p(p-x)(p-y)(p-z)$$

D'où :

$$f_1 = p(p-x)(p-y)(p-z) + \lambda(x+y+z-2p)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -p(p-y)(p-z) + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -p(p-x)(p-z) + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = -p(p-x)(p-y) + \lambda = 0$$

On en tire :

$$\frac{\lambda}{p} = (p-y)(p-z) = (p-x)(p-z) = (p-y)(p-x)$$

ou $$p-x = p-y = p-z$$ ou

$$x = y = z$$

et comme

$$x+y+z=2p \quad \text{, on trouve}$$

$$x=y=z=\frac{2p}{3}$$

<u>Remarque</u>
On a supprimé les solutions

$$p-x=0 \qquad p-y=0 \qquad p-z=0$$

qui font que le triangle se réduise à une droite
(relations: $x < y+z$, ... non remplies)
alors l'aire est nulle; c'est un minimum.

On peut faire les mêmes considérations pour voir que l'on a un maximum avec

$$x=y=z=\frac{2p}{3}$$

triangle équilatéral

On peut déduire de ce problème un théorème général:

De tous les polygones ayant même périmètre et de n côtés, celui qui a l'aire maximum est le polygone régulier de n côtés.

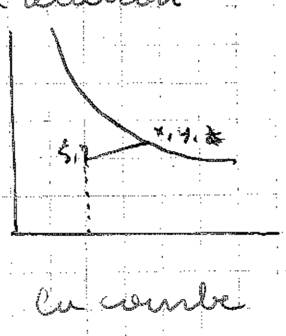
Ce théorème est un peu plus difficile à démontrer.
On voit que si n augmente indéfiniment
le polygone quelconque tend vers une courbe fermée
le polygone régulier vers un cercle

et on a ainsi la solution du problème de l'isopérimètre.

l'aire enfermé par une courbe fermée est maximum quand la courbe est une circonférence ayant même longueur que le contour de la courbe
Mais ce problème ressort du calcul des variations
on le verra plus tard

3/ On suppose toujours que l'on a la relation

$$\varphi(x,y)=0$$



Elle représente une courbe dans le plan.

Soit un point (ξ,η) du plan.
Nous cherchons le point de la courbe le plus proche du point (ξ,η)

~~soit~~ Pour résoudre le problème considérons un point x, y de la courbe et trouvons le minimum de la distance entre ce point et le point (ξ, η)

On a :

$$d^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$$

On cherche d ou $d^2 =$ extr. avec $\varphi(x,y) = 0$

Les équations seront :

$$2(x-\xi) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

$$2(y-\eta) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

ou

$$\frac{y-\eta}{x-\xi} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}$$

Mais $\frac{y-\eta}{x-\xi}$ n'est autre chose que le coefficient angulaire de la direction minimum. D'autre part au point x, y la tangente a pour coefficient angulaire :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} \qquad [\, d[\varphi(x,y)] = 0 \,]$$

On voit que :

$$\frac{y-\eta}{x-\xi} \cdot \frac{dy}{dx} = -1$$

Ceci montre que la direction minimum est perpendiculaire à la direction tangente, c'est donc la direction normale

30/4/1935

Il se peut que l'on veuille chercher les valeurs extrêmes de f avec plusieurs conditions au lieu d'une. ainsi :

$$f(x,y,z) = \text{extr} \quad \text{avec :} \quad \varphi(x,y,z) = 0 \quad \psi(x,y,z) = 0 \quad \ldots$$

Dans le cas d'une seule condition il suffisait de traiter

$$f_1 = f + \lambda \varphi = \text{extr.}$$

Dans le cas de plusieurs conditions on prendra

$$f_1 = f + \lambda \varphi + \mu \psi + \ldots = \text{extr.}$$

(On peut le voir facilement)

Exemple.

Traitons l'exemple trois de la page 122 quand la courbe est dans l'espace.

Une courbe est donnée dans l'espace par deux équations (intersection de deux surfaces)

$$\varphi(x,y,z)=0$$
$$\psi(x,y,z)=0$$

Soit donc un point de l'espace:

$$\xi,\ \eta,\ \zeta$$

Cherchons le point de la courbe le plus près de ce point.

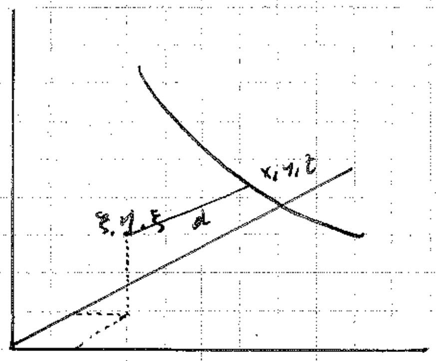
A cet effet soit la distance:

$$d^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$$

Il faut trouver le minimum de cette distance avec les conditions φ et ψ. A cet effet il faut trouver

$$f_1=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2+\lambda\varphi+\mu\psi=\text{extr.}$$

On a les conditions:



$$2(x-\xi)+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}=0$$

$$2(y-\eta)+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\mu\frac{\partial\psi}{\partial y}=0$$

$$2(z-\zeta)+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\mu\frac{\partial\psi}{\partial z}=0$$

Il faut éliminer de ces 3 relations λ et μ.
On peut considérer les trois équations ci-dessus comme 3 équations homogènes linéaires par rapport aux variables

$$\nu,\ \lambda,\ \mu \qquad (\nu \text{ variable supplémentaire: } \nu=2)$$

Pour qu'un tel système ait une solution, il faut que son déterminant s'annule.

Par suite on a:

$$\begin{vmatrix} x-\xi & \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ y-\eta & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ z-\zeta & \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\psi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

On a ainsi une relation entre x, y, z. On a d'autre part :

$$\varphi(x,y,z)=0$$
$$\psi(x,y,z)=0$$

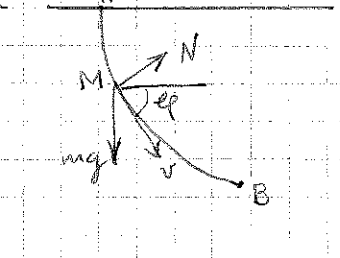
On a ainsi 3 relations à 3 inconnues. On en déduit x, y, z. On peut voir par des considérations de géométrie différentielle que la direction d est la direction normale à la courbe et passe par le point (ξ, η, ζ)

Nous passons maintenant aux problèmes de calcul des variations.

Ces problèmes sont avec ou sans conditions adjointes. Nous commencerons par les problèmes sans conditions adjointes. On peut citer comme exemple classique le problème du Brachistochrone

On donne deux points A et B et on demande de déterminer le chemin que doit suivre sous l'action de la gravité un point animé d'une vitesse initiale v_0, pour se rendre de A à B dans le temps le plus court

Si l'on suppose que la vitesse initiale v_0 soit nulle et qu'on parte de la position de repos A on a que si le point est descendu de y sa vitesse sera :



$$v = \sqrt{2gy}$$

Supposons connue la courbe : $y=y(x)$
Le point M est soumis à 2 forces :
1/ son poids mg
2/ la réaction N contre la courbe.

Il faut trouver l'équation du mouvement. La vitesse du point M est dirigée suivant la tangente à la courbe. En projetant les forces sur cette tangente on peut écrire :

$$\sout{m\,d^2x} \quad m\frac{d^2s}{dt^2} = mg\sin\varphi$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g\sin\varphi$$

Mais :

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{2gy} = \frac{gy'}{\sqrt{2gy}} \cdot \frac{dx}{dt} =$$

$$\left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

D'autre part :

$$tg\varphi = y'$$ (puisque v est tangente à la courbe)

D'où $$\sin\varphi = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Alors on aura :

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g\sin\varphi$$ ou

$$\frac{gy'}{\sqrt{2gy}}\frac{dx}{dt} = \frac{gy'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2gy}}\sqrt{1+y'^2}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,dx$$

x_1 = abscisse de A
x_2 = " de B

On a donc la durée de trajet si la courbe est connue. Mais pour nous le problème consiste à trouver justement $y(x)$ de façon que le temps ci-dessus soit minimum. Nous sommes donc amenés à traiter le minimum d'une certaine intégrale.

Il en est de même pour les problèmes du calcul de variations sans conditions adjointes. On a à traiter :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx = \text{extr.}$$

F étant une fonction de x, y, y' (Dans l'exemple du brachistochrone on avait : $F = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$)

Ajoutons aussi que l'on donne

$$y(x_1) = y_1 \qquad \text{et } y(x_2) = y_2$$

Traitons donc ce cas général et pour fixer les idées supposons que l'on cherche le minimum de I (on verra plus tard le maximum).

Quelles sont donc les conditions nécessaires pour que I soit minimum ?

Si I est minimum pour $y = y(x)$ il faut que en remplaçant y dans F par une fonction quelconque de x, la nouvelle valeur de l'intégrale soit supérieure à la valeur de I pour laquelle $y = y(x)$.

En d'autre termes soit la fonction

$$p(x) = y(x) + \alpha\, \eta(x)$$

Si dans F on remplace y par p il faut que pour chaque valeur arbitraire de $\eta(x)$ et pour chaque α différent de 0 l'intégrale représentant I soit supérieure à la valeur de I quand $\alpha = 0$. Remplaçons donc y par p dans F

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} F(x,\ y + \alpha\eta,\ y' + \alpha\eta')\, dx$$

Il est évident que l'intégrale sera une fonction de α

Il faut que cette expression soit supérieure pour chaque $\alpha \neq 0$ à $I(0)$

En d'autre terme il faut que I soit minim pour $\alpha = 0$

Calculons donc $\dfrac{dI}{d\alpha}$ ou $\dfrac{\delta I}{\delta \alpha}$ (on emploie ces notations dans le calcul des variations. Ce symbole représente toujours la dérivée de I, on emploie des δ car on ne sait s'il faut employer des d ou ∂ car on ne sait pas si I est seulement fonct. de α...) et faisons y $\alpha = 0$ On doit avoir alors $\dfrac{\delta I}{\delta \alpha} = 0$

Mais

$$\frac{\delta I}{\delta \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial (y + \alpha\eta)} \cdot \eta + \frac{\partial F}{\partial [y' + \alpha\eta']}\, \eta' \right] dx$$

On suppose F continue et régulière et on peut dériver alors sous le signe d'intégrale d'après les règles connues. Faisons donc $\alpha = 0$. Par suite

$$\frac{\delta I}{\delta \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\, \eta' \right] dx = 0$$

l'intégrale ci-dessus doit s'annuler quelque soit $\eta(x)$

Pour avoir la réponse transformons

$$i = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' dx$$

On peut intégrer par parties en remarquant que $\eta' dx = d\eta$

On aura :

$$i = \eta \frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) dx$$

Remarquons que toutes les courbes $p(x)$ passent par les points x_1 x_2 quelque soit α.

Or comme en ces points :

$$p(x_1) = y_1 = y(x_1) \quad \text{et}$$

$$p(x_2) = y_2 = y(x_2)$$

(puisque la courbe $y(x)$ passe par ces points) on voit de l'égalité

$$p(x) = y + \alpha\eta$$

que

$$\eta(x_1) = 0$$

$$\eta(x_2) = 0$$

Par suite ci dessus :

$$\eta \frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \quad \left[= \eta(x_1)\left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)_{x_1} - \eta(x_2)\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{x_2} = 0\right]$$

Donc

$$i = -\int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\right) dx$$

et alors :

$$\frac{\delta I}{\delta \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] \eta dx = 0$$

quelque soit η. Ceci entraîne la condition nécessaire et suffisante :

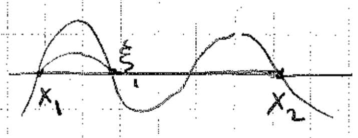
$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

<u>Suffisante</u>
Si elle a lieu on a bien que $\frac{\delta J}{\delta \alpha} = 0$ quelque soit η

<u>Nécessaire</u>
Supposons qu'elle ne soit pas 0. Soit donc

$$\rho(x) = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) =$$

Traçons la courbe $\rho(x)$



Montrons que $\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\,\eta(x)\,dx$

ne peut s'annuler quelque soit $\eta(x)$.
En effet nous pourrons choisir η de manière qu'elle s'annule partout exceptée en ~~un endroit~~ dans un intervalle où $\rho(x)$ est positif par exemple $x_1 - \xi_1$ et où elle est positive

Alors: $\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\,\eta(x)\,dx = \int_{x_1}^{\xi_1} \rho(x)\,\eta(x)$

car de ξ_1 à x_2 $\eta(x) = 0$ et par suite le produit $\rho(x)\eta(x) = 0$

Mais entre x_1 et ξ_1 et $\eta(x)$ et $\rho(x)$ sont positives; leur produit l'est aussi et par suite l'intégrale

$$\int_{x_1}^{\xi_1} \rho(x)\,\eta(x)\,dx$$

ne peut s'annuler. Ainsi on voit que déjà l'intégrale ne s'annule pas pour une certaine fonction $\eta(x)$
Il faut donc que nécessairement on ait

$$\rho(x) = 0 \quad \text{ou}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

On obtient ainsi une équation différentielle pour y^*.

Mercredi 1/5/1935

Il en est de même pour tous les problèmes du calcul des variations : la solution de ces problèmes se ramène à la solution d'une équation différentielle.
Cette équation différentielle est dite l'eulérienne du problème.
Cette équation donne comme solutions une infinité

de courbes. Ces courbes sont dites extrémales. L'espace couvert par les extrémales est dit champ des extrémales.

Pour trouver la solution du problème, il faut trouver l'extrémale qui remplit nos conditions initiales (celle qui passe par les deux points)

On trouve l'équation :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

Si l'on développe la différentielle on obtient en remarquant que $F = F(x, y, y')$

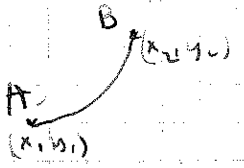
$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0$$

On voit donc que l'on obtient une équation du second ordre. On voit par suite les conditions que doivent remplir F et y.

F et y doivent être continus et dérivables au moins deux fois.

Avant d'aller plus loin nous allons illustrer la théorie par des exemples

I - Trouver le chemin le plus court (géométriquement) pour aller d'un point à un autre dans le plan.



~~L'équation~~ La longueur de toute courbe réunissant les points A et B est donnée par :

$$J = \int_{x_1}^{x_2} ds$$

ds étant l'élément de l'arc de la courbe. Mais

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1+y'^2}$$

D'où :

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

Ici :

$$F \equiv \sqrt{1+y'^2}$$

on voit que F ne dépend pas de y d'où

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

et alors l'extrémum de notre problème devient

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

ou $$\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{cte}$$

Mais $$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = K$$

On peut tirer de là:

$$y' = \text{cte}$$

Ce qui montre que les extrémales sont des droites. Le champ d'extrémales est le plan et ainsi la solution cherchée est la droite AB résultat bien connu.

II Problème du brachistochrone

Reprenons ce problème. Nous avons trouvé p. 126 que le temps pour aller d'un point à un autre était

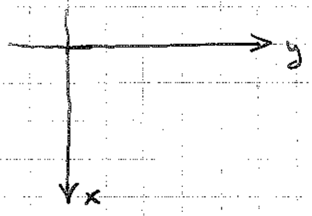
$$I = t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\, dx$$

On voit dans notre exemple que:

$$F \equiv \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$$

Pour avoir une équation différentielle plus commode changeons nos axes de coordonnées de façon à transformer l'axe des y en axe des x.

Il faut donc changer dans l'éq l'intégrale ci-dessus y en x et y' en $\frac{dx}{dy}$



On aura:

$$J = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}{\sqrt{x}}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{x}}\, dx$$

avec $y' = \frac{dy}{dx}$

Ainsi $$J = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{x}}\, dx$$

Il faut trouver $J = \text{extr.}$

Dans notre exemple maintenant

$$F = \sqrt{\frac{1+y'^2}{x}}$$

On voit que sous cette forme F ne dépend pas de y et par suite

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

et l'eulérienne devient :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

ou

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{cte}$$

Soit dans notre exemple :

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}} = \text{const.}$$

$$\frac{y'^2}{1+y'^2} = \text{const.} \times x$$

$$y'^2 = \frac{\text{const} \times x}{1 - \text{const.} \times x} = \frac{x}{\frac{1}{\text{const.}} - x} = \frac{x}{\text{const.} - x}$$

posons

$$\text{const.} = 2a$$

D'où :

$$y' = \sqrt{\frac{x}{2a-x}}$$

Alors on aura en intégrant

$$y = \int \sqrt{\frac{x}{2a-x}}\, dx$$

Pour évaluer l'intégrale nous faisons le changement de variable suivant :

$$x = 2a \sin^2 \varphi/2$$

(cela suppose $x < 2a$, mais ce n'est autre chose que la condition que la quantité sous le radical soit positive)

Alors $2a - x = 2a(1-\sin^2\varphi/2) = 2a\cos^2\varphi/2$

$$dx = 2a .\ 2\sin\varphi/2 \cdot \tfrac{1}{2}\cos\varphi/2\, d\varphi = 2a \sin\varphi/2 \cos\varphi/2\, d\varphi$$

Alors :

$$y = \int \frac{\sin \varphi/2}{\cos \varphi/2} \cdot 2a \sin \varphi/2 \cos \varphi/2 \, d\varphi$$

$$y = 2a \int \sin^2 \varphi/2 \, d\varphi = a \int (1-\cos\varphi) \, d\varphi$$

$$y = a(\varphi - \sin\varphi) + cte$$

On donc trouver y en fonction de φ

On peut le trouver en fonction de x si on a (la cte est nulle)

$$x = 2a \sin^2 \varphi/2 = a(1-\cos\varphi)$$

$$\cos\varphi = \frac{a-x}{a}$$

$$\varphi = \arccos \frac{a-x}{a}$$

D'où :

$$y = a\left[\arccos\frac{a-x}{a} - \sin \arccos \frac{a-x}{a}\right]$$

Mais $\sin \arccos \frac{a-x}{a} = \sqrt{1-\left(\frac{a-x}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a}$

D'où

$$y = a \arccos \frac{a-x}{a} - \sqrt{2ax-x^2}$$

Mais il préférable de conserver les équations paramétriques :

$$x = a(1-\cos\varphi)$$
$$y = a(\varphi - \sin\varphi) + cte$$

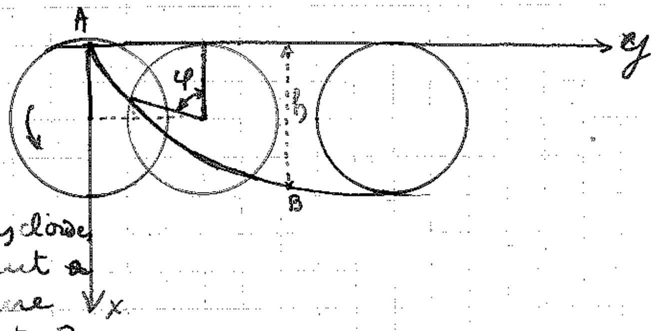
C'est l'équation classique d'une cycloïde dont l'axe de déroulement est l'axe des abscisses

On voit que l'on a ci-dessus 2 constantes arbitraires

a et une autre constante figurant dans y

Ainsi on a une infinité de cycloïdes dans le plan si l'on prend comme origine des coordonnées le point A on peut voir facilement que la constante de y disparaît et on a l'équation :

$x = a(1-\cos\varphi)$
$y = a(\varphi - \sin\varphi)$



qui varie avec ~~a~~

On obtient une simple infinité de cycloïdes passant toutes par le point A. Il y en aura donc une qui passera par le point B. et une seule. Connaissant les coordonnées de B on peut ~~facilement~~ en déterminer a. Seulement il faut résoudre une équation transcendante ce qui n'est pas facile

On peut chercher le temps pour aller de A à B. On avait

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{x}}\, dx$$

Mais ici $x_1 = 0 \qquad x_2 = h$

D'où :

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \sqrt{\frac{1+y'^2}{x}}\, dx$$

Il faut introduire : $y' = \sqrt{\frac{x}{2a-x}}$

On obtient :

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \sqrt{\frac{2a}{(2a-x)x}}\, dx$$

On fait toujours le même changement de variables :

$$x = 2a \sin^2\varphi/2 \qquad ; \quad 2a - x = 2a\cos^2\varphi/2$$
$$dx = 2a \sin\varphi/2 \cos\varphi/2$$

et les limites 0 et φ_1 $\qquad \varphi_1 = \arccos\frac{a-h}{a}$

Alors :

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\varphi_1} \frac{2a\sqrt{a}\cos\varphi/2 \sin\varphi/2}{2a\cos\varphi/2 \sin\varphi/2}\, d\varphi$$

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{\varphi_1} d\varphi = \sqrt{\frac{a}{g}}\,\varphi_1$$

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}} \arccos \frac{a-h}{a}$$

Seulement a n'est pas connu et on a vu qu'il n'est pas facile à calculer.

Pour le cas particulier où $h = 2a$, c'est-à-dire dans le cas où le point B est le point le plus bas (a = rayon du cercle générateur) on obtient

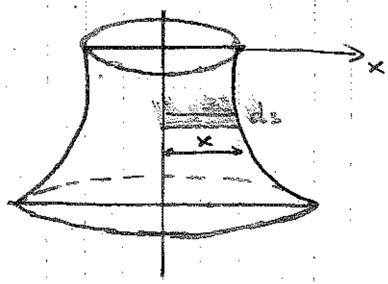
$$T = \sqrt{\frac{a}{g}} \arccos(-1) = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

C'est la période du pendule cycloïdale

Jeudi 2/5/1935

On peut traiter aussi le problème suivant.

On donne un axe vertical et deux points du plan. On cherche la courbe ~~qui~~ passant par les deux points qui tournant autour de l'axe engendre une surface de révolution dont l'aire latérale soit minimum



Le problème n'offre pas de difficulté. Il suffit de considérer un élément de courbe ds. Si x est sa distance à l'axe on aura que l'élément de l'aire engendrée par ds est:

$$2\pi x ds$$

et l'aire totale sera:

$$\int_{x_1}^{x_2} 2\pi x \, ds = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1+y'^2}\, dx$$

Nous pouvons prendre:

$$J = \int_{x_1}^{x} x\sqrt{1+y'^2}\, dx$$

car la multiplication par une constante n'influe en rien à la solution.

On peut appliquer les règles connues et trouver la solution; le problème est facilement soluble.

Revenons au problème de l'isopérimètre.

Soient deux points x_1 et x_2 sur l'axe des x. Considérons l'aire enfermée par une courbe passant

par ces deux points. Il s'agit justement de déterminer cette courbe $y = y(x)$ de façons que l'aire ci-dessus soit maximum sous la condition que la longueur de la courbe soit donnée.

Il s'agit donc de déterminer y tel que

$$I = \int_{x_1}^{x_2} y\, dx$$ soit maximum sous

la condition.

$$I_1 = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\, dx = 2l$$

On est donc ramené à traiter le cas général suivant :

Déterminer une fonction $y = y(x)$ telle que:

$$I = \int_{x_1} F(x, y, y')\, dx$$ soit extremum sous la condition

$$J_1 = \int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y')\, dx = C$$ donnée

Ce cas se traite comme auparavant. Nous remplaçons y par

$$y(x) + \alpha \eta(x)$$

On obtient alors:

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} F(x,\ y+\alpha\eta,\ y'+\alpha\eta')\, dx$$

$$I_1(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} G(x,\ y+\alpha\eta,\ y'+\alpha\eta')\, dx = C$$

S'il n'y avait pas de condition adjointe nous avons vu qu'il suffisait de faire

$$\frac{\delta I}{\delta \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta\, dx = 0 \qquad (1)$$

Seulement on a une condition adjointe. C'est pourquoi au lieu de considérer seulement

$$I(\alpha) = \text{extr}$$

il faut faire:

$$I(\alpha) + \lambda I_1(\alpha) = \text{extr.} = \int_{x_1}^{x_2} (F + \lambda G)\, dx$$

Il faut donc faire dans (1) $F \to F + \lambda G$.

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial y'} + \lambda \frac{\partial G}{\partial y'} \right] \right) \eta \, dx = 0 \qquad \text{q.q.s. } \eta$$

Par suite on aura l'équation différentielle

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial y'} + \lambda \frac{\partial G}{\partial y'} \right] = 0$$

Appliquons ceci à notre problème de l'isopérimètre.

Dans ce cas on a :

$$F \equiv y \qquad G \equiv \sqrt{1+y'^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 \; ; \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \; ; \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \; ; \quad \frac{\partial G}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

D'où :

$$1 - \frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = 0$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right)$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{x}{\lambda} + c \qquad c = \text{const. d'intégration}$$

$$\frac{y'^2}{1+y'^2} = \frac{(x+\lambda c)^2}{\lambda^2} = \left(\frac{x}{\lambda} + c \right)^2$$

$$y'^2 = \frac{\left(\frac{x}{\lambda}+c\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{\lambda}+c\right)^2}$$

$$y' = \frac{\frac{x}{\lambda}+c}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\lambda}+c\right)^2}}$$

$$y = \int \frac{\frac{x}{\lambda}+c}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\lambda}+c\right)^2}} \, dx + b \qquad b = \text{cte d'intégr.}$$

$$y = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d\left[\left(\frac{x}{\lambda}+c\right)^2\right]}{\left[1 - \left(\frac{x}{\lambda}+c\right)^2\right]^{1/2}} + b = \lambda \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\lambda}+c\right)^2} + b$$

$$(y-b)^2 = \lambda^2\left[1 - \left(\frac{x}{\lambda}+c\right)^2\right]$$

$$(y-b)^2 = \lambda^2 - \lambda^2 \frac{(x+\lambda c)^2}{\lambda^2}$$

$$(y-b)^2 + (x+\lambda c)^2 = \lambda^2$$

$$(x+\lambda c)^2 + (y-b)^2 = \lambda^2 \qquad (2)$$

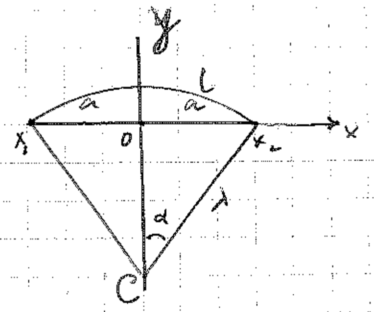
C'est l'équation d'un cercle de rayon λ

On voit que cette équation dépend de 3 paramètres λ, c, b. C'est donc que les extrémales sont tous les cercles du plan.

Il s'agit donc de déterminer λ, c, b étant données

$$y(x_1) = 0 \qquad\qquad y(x_2) = 0$$

$$\text{et} \quad \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\, dx = 2l$$



Il s'agit de déterminer ces constantes à partir des équations ci-dessus.

Si l'on suppose que l'origine des coordonnées est le milieu de x_1x_2 et que $x_1x_2 = 2a$

On a en faisant $y=0$ il faut $x = \pm a$ donc ~~(1)~~ $c=0$ c'est-à-dire que le centre du cercle est sur l'axe des y. Si $c=0$ on a pour $y=0$ et $x \pm a$

$$b^2 = \lambda^2 - a^2$$

Il s'agit maintenant d'appliquer la 3e condition que la longueur de l'arc soit égale à $2l$

Mais soit α l'angle que le rayon Cx_2 fait avec oy on aura :

$$l = \lambda\alpha \quad , \qquad a = \lambda \sin\alpha$$

$$\alpha = \frac{l}{\lambda} \quad , \quad \text{d'où}$$

L'équation transcendante qui donne λ.

$$a = \lambda \sin\frac{l}{\lambda}$$

L'angle a étant compris entre 0 et π il faudra prendre pour λ celle des racines de cette équation qui est inférieure à $\frac{l}{\pi}$

En supposant a infiniment petit c'est-à-dire que x_1 et x_2 sont confondus, le problème se transforme en celui-ci : Déterminer parmi les courbes fermées de périmètre $2l$ celle qui renferme une aire maximum

Dans ce cas l'équation en λ devient

$$\sin\frac{l}{\lambda} = 0$$

$$\lambda = \frac{l}{\pi}$$

On voit que la solution du problème sera un cercle ayant le périmètre donné.

On peut généraliser ces problèmes du calcul des variations par deux procédés :

1) En supposant que y soit fonction de plusieurs variables :

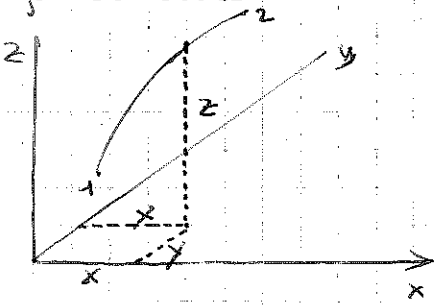
$$y = y(x_1, x_2 \ldots)$$

2) En supposant que F soit fonction non seulement de la 1ère dérivée mais aussi de la dérivée seconde et celles d'ordre supérieur

Lundi 6/5/1935

Commençons par la généralisation suivant le 1er mode indiqué dans la leçon précédente.

Supposons que l'on ait dans l'espace les coordonnées d'un point :



$$x(t) \qquad y(t) \qquad z(t)$$

en fonction du paramètre t.

Nous prenons ainsi 3 variables. Mais le problème se généralise facilement car les calculs sont identiques

Nous nous donnons donc 2 points fixes 1 et 2 et nous faisons varier la courbe qui réunit ces deux points ~~et aussi~~

Généralement on devra varier

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, z, x', y', z')\, dt$$

(x', y', t' sont respectivement $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$)

A cet effet nous posons au lieu de x, y, z

$$x + \alpha\xi \quad , \quad y + \alpha\eta \quad , \quad z + \alpha\zeta$$

ξ, η, ζ sont des fonctions de t

On aura alors

$$J(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} F(x+\alpha\xi, \ y+\alpha\eta, \ z+\alpha\zeta, \ x'+\alpha\xi', \ y'+\alpha\eta', \ z'+\alpha\zeta')\, dt$$

Il s'agit comme dans le cas d'une seule variable de rendre $J(\alpha)$ extremum pour $\alpha = 0$

En opérant comme 1 seule variable p. 127, on obtient

$$\frac{\delta J(\alpha)}{\delta\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial z}\zeta, \ \frac{\partial F}{\partial x'}\xi' + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' + \frac{\partial F}{\partial z'}\zeta' \right) dt = 0$$

Nous modifions :

$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial x'}\xi' dt$ en l'intégrant par parties car $\xi' dt = d\xi$. On aura :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial x'}\xi' dt = \left| \frac{\partial F}{\partial x'}\xi \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)\xi\, dt$$

Nous supposons que toutes les courbes variées passent par les points 1 et 2 ; par suite

$$\xi(t_1) = \xi(t_2) = \eta(t_1) = \eta(t_2) = \zeta(t_1) = \zeta(t_2) = 0 \qquad (1)$$

Alors :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial x'}\xi' dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)\xi\, dt$$

On a deux équations identiques pour

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' dt \quad \text{et} \quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial z'}\zeta' dt$$

D'où :

$$\frac{\delta J}{\delta\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)\right]\xi\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\eta\, dt + \dots = 0$$

$\frac{\delta J}{\delta\alpha}$ doit s'annuler quelques soient ξ, η, ζ car nous les avons pris arbitraires (remplissant tout de même la condition (1))

Pour que la somme ci-dessus soit nulle quelques soient ξ, η, ζ il faut et il suffit que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0$$

(raisonnement identique à celui de la p. 129 pour une seule variable)

On a ainsi 3 équations différentielles bien symétriques.

Exemple

Nous citerons comme exemple un théorème très général de la mécanique rationnelle.

Considérons un point matériel de masse m qui se meut sur une courbe sous l'action des forces qui lui sont appliquées.

Nous supposons (et ce qui arrive généralement) que ces forces dérivent d'une fonction de forces ou potentiel:

$$U(x, y, z)$$

Nous pouvons appliquer à ce point les équations de Newton

$$m\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} = \text{projection des forces sur l'axe des } x$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y} = \text{" " " " " " } y$$

$$m\frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z} = \text{" " " " " " } z$$

v_x, v_y, v_z sont les projections de la vitesse sur 3 axes

On peut déduire de ces 3 équations le théorème de la force vive.

A cet effet multiplions la 1ère équation par

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

la seconde par

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

la 3e par

$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

additionnons. On aura:

$$m\left(v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt}\right] = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Mais $v_x \frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v_x^2)$

v_y - - - - - - - - -

v_z - - - - - - - -

et le second membre de l'équation n'est autre chose que:

$$\frac{dU}{dt}$$

On a donc :

$$m\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right] = \frac{dU}{dt}$$ ou

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{dU}{dt}$$ ou en intégrant

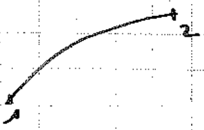
$$\frac{mv^2}{2} = U + h$$ h = cte d'intégration

$$v^2 = \frac{2(U+h)}{m}$$

$$v = \sqrt{\frac{2(U+h)}{m}}$$

Nous démontrerons maintenant le théorème suivant dû à Euler-Jacobi et qui est notre exemple.

Théorème d'Euler - Jacobi ou théorème de la moindre action



Les ~~déb~~ points de départ et d'arrivée d'un point matériel qui se meut sous l'action des forces qui lui sont appliquées étant connus, le mouvement du point est donné par

$$I = \int_{(1)}^{(2)} v\,ds \quad = \quad \text{extr.}$$

$v\,ds$ = vitesse par chemin parcouru est dit action aussi le théorème s'appelle aussi théorème de la moindre action.

Pour démontrer ce théorème, nous partons de $I = \text{extr}$ et nous montrerons que l'on arrive exactement aux équations Newtoniennes par une simple transformation.
En effet on peut écrire:

$$I = \int_{(1)}^{(2)} v(x,y,z)\,\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\;dt$$

car puisque la force dérive d'un potentiel, la vitesse est alors fonction de la position aussi, et

$$ds = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\;dt$$

Appliquons donc les règles de variation traitées ci-dessus à I.

Ici $\quad F = v(x,y,z)\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$

On a donc l'équation de Euler pour x :

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) = \frac{\partial v}{\partial x}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} - \frac{d}{dt}\left[v\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\right] = 0$$

et deux autres équations analogues pour y et z.

Nous disons que ces 3 équations suffisent pour déterminer le mouvement du point. Montrons en effet qu'à partir de ces équations on a les équations de Newton.
En effet on a:

$$\frac{\partial v}{\partial x}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = \frac{d}{dt}\left[v\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\right]$$

Mais $\quad \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = v \quad$ et $\quad x' = v_x$

On a donc :

$$v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv_x}{dt}$$

Mais : $v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial (v^2)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{dv_x}{dt}$$

et puisque les forces dérivent d'un potentiel on sait que :

$$v^2 = 2.\frac{U+h}{m} \qquad \text{ou}$$

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{U+h}{m}$$

Par suite :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial x}$$

D'où :

$$\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dv_x}{dt} \qquad \text{ou}$$

$$m\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

qui est bien l'expression de la loi de Newton. Ainsi notre théorème est démontré.

Nous pourrons dire conséquemment que ~~dans~~ les équations du mouvement de Newton expriment le fait de la moindre action.

Reprenons notre généralisation en partant du second point exposé p. 139. Nous supposons donc cette fois que la fonction F est fonction des dérivées du second ordre et au dessus.

Nous reprendrons la forme : $y = y(x)$. On peut d'ailleurs passer facilement à la forme paramétrique. Nous traiterons

le cas où F dépend de la seconde dérivée seulement. Mais les calculs se généralisent facilement dans le cas où F dépend des dérivées d'ordre supérieur. Donc il s'agit de faire

$$\mathcal{I} = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'')\, dx = \text{extr.}$$

On prend toujours au lieu de y :

$$y + \alpha\eta$$

On obtient :

$$\mathcal{I}(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} F(x,\ y+\alpha\eta,\ y'+\alpha\eta',\ y''+\alpha\eta'')\, dx$$

et l'on pose que $\mathcal{I}(\alpha)$ est extr. pour $\alpha = 0$ ce qui exige :

$$\frac{\delta \mathcal{I}(\alpha)}{\delta \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' + \frac{\partial F}{\partial y''}\eta''\right) dx = 0$$

Nous savons transformer :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\, dx$$ (v. p. 128 en haut)

Etudions : $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y''}\eta''\, dx$

Intégrons par parties en remarquant que

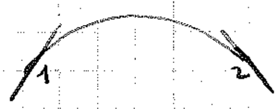
$$\eta''\, dx = d\eta'.$$

On aura :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y''}\eta''\, dx = \left|\eta' \frac{\partial F}{\partial y''}\right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\eta'\, dx$$

Pour que $\left|\eta' \frac{\partial F}{\partial y''}\right|_{x_1}^{x_2}$ s'annule nous supposerons

aussi qu'aux deux extrémités 1 et 2 les dérivées y' sont les mêmes pour chaque courbe variée.



En d'autres termes aux points extrêmes 1 et 2 chaque courbe variée a même tangente.

Cette supposition entraîne

$$\eta'(x_1) = \eta'(x_2) = 0$$

et alors :

$$i = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y''} \eta'' dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) \eta' dx$$

Intégrons encore une fois par parties en prenant

$$\eta' dx = d\eta$$

On aura :

$$i = \left| - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) \eta \right|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) \eta \, dx$$

Mais $\left| \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) \eta \right|_{x_1}^{x_2} = 0$ car

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$$

Donc :

$$i = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) \eta \, dx$$

et alors on aura pour expression de $\frac{\delta I}{\delta \alpha}$:

$$\frac{\delta I}{\delta \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) \right] \eta \, dx = 0$$

q.q. soit η

D'où la condition nécessaire et suffisante :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0$$

C'est l'extrémisme de l'équation

<u>Remarque</u>

On voit que si $F = F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)})$

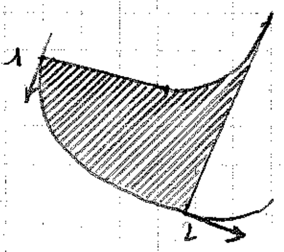
l'extrémisme sera :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) - \dots + (-1)^i \frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(i)}}\right) \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)$$

Mardi 7/5/1935

Considérons l'exemple suivant comme ~~généralisation~~ application de la seconde généralisation

Considérons une courbe et sa développée
Considérons l'aire enfermée par la courbe, la développée et deux rayons de courbure extrêmes passant par les points 1 et 2.



On suppose donnés les points 1 et 2, les tangentes en ces 2 points et on demande de déterminer la courbe 12 de manière que l'aire ci-dessus soit minimum.

Pour résoudre le problème donnons une expression analytique de l'aire ci-dessus.

Soit ρ un des rayons de courbure et ds l'élément de l'arc. On peut supposer que l'aire est constituée par la somme de triangles infinitésimaux d'aire:

$$\frac{1}{2}\rho\, ds$$

Nous pouvons donc pour intégrale à varier le double de l'aire ou:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \rho\, ds$$

Nous savons d'après les formules de la géométrie analytique ou différentielle que

$$\rho = \frac{\left[1+y'^2\right]^{3/2}}{y''} \qquad ds = (1+y'^2)^{1/2}\, dx$$

si l'équation de la courbe est donnée par $y = y(x)$

Nous aurons:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \rho\, ds = \int_{x_1}^{x_2} \frac{(1+y'^2)^2}{y''}\, dx$$

Il s'agit de faire varier I. Appliquons le résultat de la page précédente en remarquant qu'ici:

$$F(x, y, y', y'') \equiv \frac{(1+y'^2)^2}{y''}$$

On a d'abord que $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$. Par suite

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0$$

Nous avons des différentielles totales. Nous pouvons intégrer.

On aura :

$$\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 2c \qquad 2c = \text{cte d'intégration}$$

or puisque :

$$F = \frac{(1+y'^2)^2}{y''}$$

$$\frac{2(1+y'^2).2y'}{y''} - \frac{d}{dx}\frac{-(1+y'^2)^2}{y''^2} = 2c \qquad \text{ou}$$

$$\frac{4y'(1+y'^2)}{y''} + \frac{d}{dx}\left[\frac{(1+y'^2)^2}{y''^2}\right] = 2c$$

$$\frac{4y'(1+y'^2)}{y''} + \frac{2y''^2(1+y'^2).2y'y'' - (1+y'^2)^2 2y''y'''}{y''^4} = 2c$$

$$\frac{4y'(1+y'^2)}{y''} + \frac{4y'(1+y'^2)}{y''} - \frac{2(1+y'^2)^2}{y''^3}y''' = 2c$$

$$\frac{8y'(1+y'^2)}{y''} - \frac{2(1+y'^2)^2}{y''^3}y''' = 2c$$

$$8y'(1+y'^2) - \frac{2(1+y'^2)^2}{y''^2}y''' = 2cy''$$

Le premier de l'égalité ci dessus est la dérivée par rapport à x de :

$$2.\frac{(1+y'^2)^2}{y''}$$

En effet

$$\frac{d}{dx}2\frac{(1+y'^2)^2}{y''} = 2\frac{y''2(1+y'^2)2y'y'' - (1+y'^2)^2y'''}{y''^2}$$

$$= 8(1+y'^2)y' - \frac{2(1+y'^2)^2}{y''^2}y'''$$

qui est bien l'expression ci dessus. On a donc

$$2\frac{d}{dx}\left[\frac{(1+y'^2)^2}{y''}\right] = 2cy''$$

ou

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(1+y'^2)^2}{y''}\right] = c\frac{dy'}{dx}$$

Nous pouvons intégrer encore une fois. On aura :

$$\frac{(1+y'^2)^2}{y''} = cy' + a$$ a = nouvelle constante d'intégration

Afin de donner à cette égalité une forme plus explicite, divisons les deux membres par $\sqrt{1+y'^2} = (1+y'^2)^{1/2}$ on aura:

$$\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{cy'}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{a}{\sqrt{1+y'^2}} \qquad (1)$$

Mais $\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = \rho$

D'autre part soit τ l'angle variable que fait en chaque point la tangente à la courbe avec l'axe des abscisses. Nous savons que:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \operatorname{tg}\tau$$

Par suite:

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\tau}} = \cos\tau$$

et $$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \sin\tau$$

Par suite l'égalité (1) prend la forme:

$$\rho = c\sin\tau + a\cos\tau \qquad (2)$$

C'est l'équation intrinsèque de la courbe cherchée résultat qui était à prévoir car l'équation intrinsèque est une équation qui subsiste en dehors de la position de la courbe et justement jusqu'à présent on n'a fait aucune considération sur la position de la courbe

En remarquant que:

$$\rho = \frac{ds}{d\tau}$$ d'après les formules de la géométrie différentielle

on a:

$$\frac{ds}{d\tau} = c\sin\tau + a\cos\tau$$

D'où en intégrant

$$s = a\sin\tau - c\cos\tau + b$$ b = nouvelle variable d'int.

qui est l'équation intrinsèque intégrée

La relation (2) était

$$\rho = c\sin\tau + a\cos\tau \qquad (2)$$

Cette équation est l'équation intrinsèque de la cycloïde.
En effet on se rappelle que ~~l'éq~~ les équations paramétriques de la cycloïde étaient:

$$x = a(\varphi - \sin\varphi)$$
$$y = a(1-\cos\varphi)$$

On a:

$$dx = a(1 - \cos\varphi)\,d\varphi$$
$$dy = a\sin\varphi\,d\varphi$$

D'où:

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = \frac{2\sin\varphi/2\,\cos\varphi/2}{2\sin^2\varphi/2} = \operatorname{cotg}\varphi/2$$

Donc $\operatorname{tg}\tau = \operatorname{cotg}\varphi/2$

Par suite

$$\tau = \frac{\pi}{2} - \varphi/2$$

(τ et $\varphi/2$ sont complémentaires)

D'autre part:

$$\rho = \frac{ds}{d\tau} = \sqrt{1+y'^2}\,\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{\cos\tau}\,\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{\cos\tau}\cdot\frac{\frac{dx}{d\varphi}}{\frac{d\tau}{d\varphi}}$$

$$\rho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{1}{\cos\tau}\,\frac{a(1-\cos\varphi)}{-1/2} = -2a\,\frac{1-\cos\varphi}{\cos\tau} = -4a\,\frac{\sin^2\varphi/2}{\cos\tau}$$

et comme $\sin\varphi/2 = \cos\tau$ car $\varphi/2 + \tau = \pi/2$

on a que:

$$\rho = -4a\cos\tau$$

c'est l'équation intrinsèque de la cycloïde. Elle ne diffère pas de la forme:

$$\rho = c\sin\tau + a\cos\tau$$

car on peut transformer cette dernière expression sous la forme

$$\rho = k\cos(\tau+\lambda)$$

Ainsi on a bien l'équation d'une cycloïde.

Il reste à déterminer la cycloïde passant par les points 1 et 2 et dont tangentes en ces points sont données.
On ne le fera pas.

Nous allons généraliser une troisième fois en étendant les problèmes de variations aux intégrales multiples

Soit donc par exemple à rendre extremum

$$I = \iint_{(D)} F(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$$

où F est une fonction des deux variables indépendantes x et y, de la variable z fonction de x et y et des dérivées partielles $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ et $q = \frac{\partial z}{\partial y}$; et D est un certain domaine

La méthode est la même. Nous remplaçons ci-dessus z par

$$z + \alpha\xi$$

α étant un paramètre et ξ une fonction de x, y choisie arbitrairement.
Nous aurons alors à varier

$$I(\alpha) = \iint_{(D)} F\left(x, y, z+\alpha\xi, p+\alpha\frac{\partial \xi}{\partial x}, q+\alpha\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) dx\, dy$$

Nous disons que $I(\alpha)$ est extremum pour α égal 0.
alors :

$$\left(\frac{\delta I}{\delta \alpha}\right)_{\alpha=0} = \iint_{(D)} \left[\frac{\partial F}{\partial z}\xi + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right] dx\, dy = 0$$

Il s'agit de transformer comme auparavant

$$\iint_{(D)} \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial x}\, dx\, dy \quad \text{et} \quad \iint_{(D)} \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \xi}{\partial y}\, dx\, dy$$

On peut écrire :

$$\iint_{(D)} \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial x}\, dx\, dy = \iint_{(D)} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial p}\cdot \xi\right] dx\, dy - \iint_{(D)} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)\xi\, dx\, dy$$

car :

$$\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial p}\cdot \xi\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)\xi$$

Appliquons maintenant la formule de Green qui transforme une intégrale double en une intégrale curviligne.

$$\iint_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{(C)} Q\, dy$$

D'où:

$$\iint_{(D)} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial p}\cdot \xi\right] dx\, dy = \int_{(C)} \frac{\partial F}{\partial p}\, \xi\, dy$$

C étant le contour du domaine D.

Nous supposerons que l'on fait varier z de manière que sur le contour du domaine D les valeurs de ξ soient nulles.

Par suite $\int_{(C)} \frac{\partial F}{\partial p}\, \xi\, dy = 0$

et alors:

$$\iint_{(D)} \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial x}\, dx\, dy = -\iint_{(D)} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) \xi\, dx\, dy$$

On peut d'une manière analogue montrer que

$$\iint_{(D)} \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \xi}{\partial y}\, dx\, dy = -\iint_{(D)} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right) \xi\, dx\, dy$$

D'où:

$$\frac{\delta J}{\delta \alpha} = \iint_{(D)} \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right] \xi\, dx\, dy = 0$$

ce qui entraîne la condition nécessaire et suffisante:

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right) = 0$$

car ξ est arbitraire

Comme $F = F(x, y, z, p, q)$ l'égalité ci-dessus est une relation entre x, y, z, p et q. C'est donc

Mercredi 8/5/1935

Nous avons vu que l'extrémum de:

$$\mathcal{I} = \iint_{(D)} F(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$$

était:

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right) = 0$$

Ici le $\frac{\partial}{\partial x}$ suppose la dérivation avec y constant et $\frac{\partial}{\partial y}$ la dérivation avec x constant.

Comme $\frac{\partial F}{\partial p}$ et $\frac{\partial F}{\partial q}$ sont des fonctions de x, y, z, p, q car $F = F(x, y, z, p, q)$ on aura:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} \frac{\partial q}{\partial x}$$

Mais $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ $\quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r$; $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s$; $\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$

Donc:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial x} + p\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial z} + r\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} + s\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q}$$

De même on trouve facilement que:

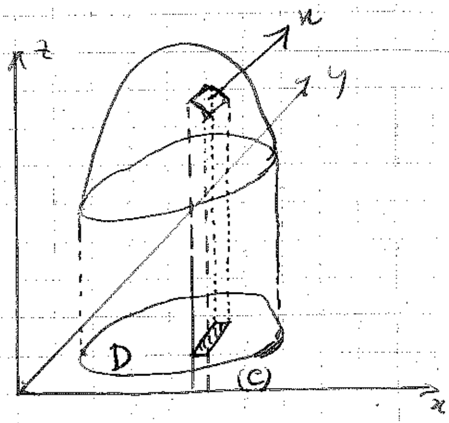
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial y} + q\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial z} + t\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} + s\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p}$$

Pour illustrer la théorie citons des exemples.

Supposons donnée une courbe gauche dans l'espace. On demande de déterminer la surface minimum passant par la courbe.

Projetons la courbe sur le plan x, y. Elle donne une courbe C enfermant un certain domaine D. Remarquons que puisque la courbe est donnée dans l'espace, nous connaissons les valeurs de z le long de la courbe C.

Il s'agit donc de déterminer une fonction $z(x,y)$ étant données ses valeurs le long de C et de manière que la surface ci haut mentionnée soit minimum.



Trouvons une expression analytique de l'aire. Considérons un élément df. Cet élément se projette sur le plan x,y suivant un rectangle d'aire $dx\,dy$. Puisque $dx\,dy$ est la projection de df nous savons que $dx\,dy$ est le produit de df par le cosinus de l'angle du plan de df avec xy. Cet angle est le même de celui de la normale au point à df et l'axe des z (car ces 2 droites sont perpendiculaires aux deux plans)

Donc:

$$df = \frac{dx\,dy}{\cos(z,n)}$$

On sait d'après les données de la géométrie analytique ou différentielle que:

$$\cos(z,n) = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \; ; \; \cos(x,n) = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \; ; \; \cos(y,n) = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

p et q étant : $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$

D'où:

$$df = \sqrt{1+p^2+q^2}\; dx\,dy$$

(comme on cherche une valeur, on peut prendre + pour le cosinus)

Il s'agit donc de faire varier:

$$J = \iint_{(D)} \sqrt{1+p^2+q^2}\; dx\,dy$$

Ici: $F(x,y,z,p,q) = \sqrt{1+p^2+q^2}$

on voit que:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = F_z = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \; ; \quad \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

D'où l'équation de Euler devient :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0$$

Cette équation différentielle aux dérivées partielles définit une famille de surfaces dites **surfaces minima**. Leur recherche n'est pas un problème facile.

En effectuant les dérivations on obtient

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}\,.\,r-\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}(pr+qs)}{1+p^2+q^2}+\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}\,t-\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}(qt+ps)}{1+p^2+q^2}=0$$

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0$$

avec $r=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $s=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ $t=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

L'intégration de cette équation est assez pénible. Pour arriver à la solution on lui fait subir une transformation de Legendre, on fait certains changements de variables et on trouve difficilement la solution.

Il faut remarquer que si la courbe est plane, on a la solution particulière $p=q=$cte ce qui montre que la surface cherchée est un plan : c'est celui de la courbe.

Tâchons de donner une interprétation géométrique à l'équation différentielle ci-dessus.

Rappelons nous que dans le cours de géométrie différentielle les courbures principales d'une surface étaient données par l'équation

$$\frac{1}{R^2}(EG-F^2)+\frac{1}{R}(EN-2FM+GL)+(LN-M^2)=0$$

avec :

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\ ;\ G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\ ;\ F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$L=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}\ ;\ N=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}\ ;\ M=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}$$

Dans le choix spécial des coordonnées : $x=u$ $y=v$ on trouve facilement que :

$E = 1+p^2$; $G = 1+q^2$; $F = pq$

$$EG - F^2 = (1+p^2)(1+q^2) - p^2q^2 = 1+p^2+q^2$$

$$L = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & r \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix} = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$N = \text{----} = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$M = \text{-----} = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

Calculons la somme $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} = \frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2}$$

Pour le choix $x=u$ $v=y$ on aura:

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} = \frac{(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}$$

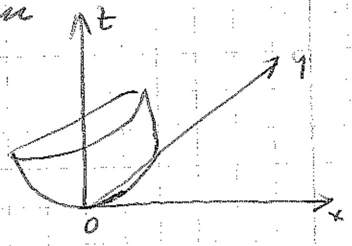
Nous voyons donc que l'équation

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0$$

montre que $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} = 0$

Ainsi les surfaces minima sont caractérisées par le fait géométrique que la somme des courbures principales est nulle

On trouve ce résultat plus facilement en faisant un choix encore plus spécial des coordonnées: nous prenions ~~z~~ comme plan des x, y le plan tangent à la surface



Alors on a qu'au point 0 on a $p = q = 0$.

Si nous développons z en série de Taylor au point 0 nous aurons:

$$z = z(0,0) + x\,p(0,0) + y\,q(0,0) + \tfrac{1}{2}\left[r(0,0)x^2 + 2s(0,0)\,xy + t(0,0)y^2\right] + \ldots$$

Comme $t(0,0)=0$ $p(0,0) = q(0,0) = 0$, le développement de z est alors du second ordre

et on a:

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \cdots$$

Au point O nous pouvons prendre

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2)$$

et même aux alentours.

Par une transformation des axes x, y on peut mettre z sous la forme:

$$z = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2)$$

c'est là la formule d'une conique que l'on appelle l'indicatrice de Dupin quand on fait z=0

On montre dans la théorie des surfaces que k_1 et k_2 sont les courbures principales et entre k_1 et k_2 on a la relation

$$k_1 + k_2 = r + t$$

ou

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = r + t$$

D'autre part reprenons l'équation:

$$(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r = 0$$

Si l'on fait $p = q = 0$ on voit que l'équation se réduit à:

$$t + r = 0$$

Par suite

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$$

et on retrouve ainsi la propriété des surfaces minima. la somme des courbures principales est nulle.

<u>Remarque.</u>
On voit que R_1 et R_2 sont de signes contraires; par suite l'équation $\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_1}\right) = 0$ est celle d'une hyperbole.

Ainsi dans les surfaces minima l'indicatrice de Dupin est une hyperbole.
On peut en tirer certains résultats géométriques pour voir a priori si certaines surfaces peuvent être des surfaces minima (il faut que l'indicatrice de Dupin soit une hyperbole)

On peut voir facilement que le plan satisfait à l'équation

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=0$$

car pour le plan $R_1=R_2=\infty$ et

$$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{R_2}=0$$

Jeudi 9/5/1935

Comme autre exemple citons :

$$I=\frac{1}{2}\iint_{(D)}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$

ou $I=\frac{1}{2}\iint_{(D)}(p^2+q^2)\,dx\,dy$

on voit qu'ici :

$$F=\frac{1}{2}(p^2+q^2)$$

Donc $\frac{\partial F}{\partial z}=F_z=0$

$$\frac{\partial F}{\partial p}=p$$

$$\frac{\partial F}{\partial q}=q$$

Notre extrémale sera :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)=0 \quad \text{ou}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}=0 \quad \text{ou}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \qquad r+t=0$$

Ainsi l'extrémale de $I=\frac{1}{2}\iint_{(D)}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$

est l'équation de Laplace.

<u>Remarque</u>

Dans l'exemple précédent on a bien trouvé $r+t=0$ mais cela n'avait lieu qu'en un seul point particulier de la surface ($p=q=0$) tandis que dans notre exemple on a $r+t=0$ pour tous les points de la surface

Nous allons maintenant approfondir un peu la théorie du calcul des variations en examinant si vraiment les valeurs extremums trouvées pour I sont des minimums ou de maximum

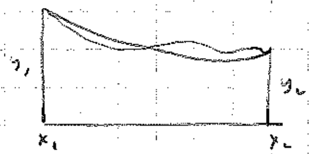
Jusqu'à présent on trouvait les valeurs extrêmes par la condition nécessaire:

$$\frac{\delta I}{\delta \alpha} = 0$$

Supposons que nous cherchions un minimum.

Partons de l'équation la plus simple:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx$$



On donne: $y(x_1) = y_1$ et $y(x_2) = y_2$

Nous cherchons une courbe $y(x)$ passant par les deux points (x_1, y_1) (x_2, y_2)

telle que l'intégrale ci-dessus soit minimum.

Supposons connue la solution. Considérons une courbe variée $y(x) + \alpha\eta(x)$

α et η étant arbitraires.

Le fait que pour $y(x)$ I est minimum se traduit par:

$$\Delta J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y+\alpha\eta, y'+\alpha\eta')\,dx - \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx \geq 0$$

quelque soient α et η

ΔJ étant la différence ci-dessus.

En posant $F(x, y+\alpha\eta, y'+\alpha\eta') - F(x, y, y') = \Delta F$

On a:

$$\Delta J = \int_{x_1}^{x} \Delta F\, dx$$

Nous pouvons développer $F(x, y+\alpha\eta, y'+\alpha\eta')$ en série de Taylor en supposant x été et en considérant $y+\alpha\eta$ et $y'+\alpha\eta'$ comme variables indépendantes.

On aura:

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\alpha\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\alpha\eta' + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\alpha^2\eta^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\alpha^2\eta\eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\alpha^2\eta'^2\right] + \dots$$

et alors on aura en intégrant :

$$\Delta I = \alpha \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' \right] dx + \frac{\alpha^2}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\eta^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\eta'^2 \right] dx$$

Mais :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' \right] = \left(\frac{\delta J}{\delta \alpha} \right)_{\alpha=0} = 0 \quad \text{par hypothèse}$$

D'où :

$$\Delta I = \frac{\alpha^2}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\eta^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\eta'^2 \right] dx + \cdots$$

Remarquons que dans les termes suivants du développement on aura toujours des puissances de α comme coefficients et ces puissances seront supérieures à 2. (provenant de $(\alpha^k \eta^k \ldots \alpha^k \eta'^k \ldots)$]

[D'ailleurs $\Delta I = \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{\delta^2 J}{\delta \alpha^2} \right)_{\alpha=0} + \frac{\alpha^3}{3!} \left(\frac{\delta^3 J}{\delta \alpha^3} \right)_{\alpha=0} \cdots$]

Comme α est arbitraire, on peut supposer α infiniment petit. On peut par suite négliger les puissances de α supérieures à 2 devant la puissance 2 et ainsi toutes les considérations sur ΔJ porteront donc sur :

$$\frac{\alpha^2}{2} \int_{x_1}^{x_2} [\ \cdots\ ]\, dx$$

Mais il faut remarquer que $\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\eta^2 + \cdots \right] dx = \left[\frac{\delta^2 J}{\delta \alpha^2} \right]_{\alpha=0}$

On est donc conduit à étudier le signe de

$$\frac{\delta^2 J}{\delta \alpha^2}$$

pour celui de ΔJ (car le coefficient de $\frac{\delta^2 J}{\delta \alpha^2}$ est positif)

<u>Remarque</u>

On aurait pu trouver ce résultat à partir de la théorie des maximum et minimum. En effet on avait :

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta')\, dx$$

ΔJ ~~=~~ $J(\alpha) - J(0)$ car $J(\alpha)$ est ~~extremum~~ pour $\alpha = 0$
on a ~~posé~~ la condition nécessaire :

$$\frac{\delta I}{\delta \alpha} = 0$$

Mais pour savoir si c'est un minimum ou un maximum, il faut étudier le signe de la seconde dérivée :

$$\frac{\delta^2 I}{\delta \alpha^2}$$

Ainsi on a le même résultat

Théorème

Pour que l'on ait un minimum pour I il faut en dehors de la condition nécessaire $\frac{\delta I}{\delta \alpha} = 0$ que $\frac{\delta^2 F}{\delta y'^2} \geq 0$

Ainsi une autre condition nécessaire pour un minimum est $\frac{\delta^2 I}{\delta \alpha^2} \geq 0$ (puisque on développé ΔI)

Démonstration

On avait :

$$\frac{\delta^2 I}{\delta \alpha^2} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \eta^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \eta \eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \eta'^2 \right] dx$$

Afin d'étudier le signe de l'expression entre crochets, transformons la, de manière à ne plus avoir une expression dont le signe dépende de η car η est arbitraire.

Considérons la fonction arbitraire

$\eta^2 v$ v = fonction quelconque de x dérivable

Considérons l'intégrale :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} (\eta^2 v) = \eta(x_1) v(x_1) - \eta(x_2) v(x_2)$$

Comme par hypothèse : $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ on voit que :

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} (\eta^2 v) = \int_{x_1}^{x_2} (2 \eta \eta' v + \eta^2 v') \, dx$$

Additions membre à membre cette expression avec $\frac{\delta^2 I}{\delta \alpha^2}$. On aura :

$$\frac{\delta^2 I}{\delta \alpha^2} + 0 = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + v' \right) \eta^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + v \right) \eta \eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \eta'^2 \right] dx$$

v est toujours arbitraire. Nous choisissons v alors de sorte que l'expression entre crochets soit un carré parfait

Il suffit alors que le discriminant de cette expression du second degré par rapport à η et η' soit nul.

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + v\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + v'\right) = 0$$

C'est là une équation différentielle pour v, équation du premier ordre. On peut en tirer

$$v' = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + v\right)^2}{\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}}$$

Alors l'expression entre crochets

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + v'\right)\eta^2 + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + v\right)\eta\eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\eta'^2$$

devient en y ~~faisa~~ remplaçant v' par sa valeur

$$\frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + v\right)^2}{\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}}\eta^2 + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + v\right)\eta\eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\eta'^2$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\left[\eta'^2 + 2\frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + v\right)}{\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}}\eta\eta' + \left(\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + v}{\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}}\right)^2\eta^2\right]$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\left[\eta' + \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + v}{\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}}\eta\right]^2$$

D'où :

$$\frac{\delta^2 I}{\delta \alpha^2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\left[\eta' + \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + v}{\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}}\eta\right]^2 dx$$

On voit de là que pour que $\frac{\delta^2 I}{\delta \alpha^2}$ soit positif il faut que :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \geqslant 0$$

Dans tout l'intervalle $x_1 - x_2$

On a donc trouvé une nouvelle condition nécessaire pour un minimum :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \geq 0$$

On l'appelle la condition de Legendre

Lundi 13/5/1935

Montrons que la condition de Legendre est nécessaire.

La démonstration se fait comme pour la condition nécessaire

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \qquad \text{(v. p. 129)}$$

Nous voulons un minimum. Par suite on doit avoir

$$\Delta I = \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y+\alpha\eta, y'+\alpha\eta') - F(x, y, y')]\, dx > 0$$

On a vu que :

$$\Delta I = \alpha \frac{\delta I}{\delta\alpha} + \frac{\alpha^2}{2}\frac{\delta^2 I}{\delta\alpha^2} + \frac{\alpha^3}{3!}\frac{\delta^3 I}{\delta\alpha^3} + \cdots$$

comme $\frac{\delta I}{\delta\alpha} = 0$ on a que

$$\Delta I = \frac{\alpha^2}{2}\frac{\delta^2 I}{\delta\alpha^2} + \cdots$$

Si l'on prend α infiniment petit on peut prendre pour le signe de ΔI celui du premier terme :

$$\frac{\alpha^2}{2}\frac{\delta^2 I}{\delta\alpha^2}$$

Pour que ΔI soit positif il faut donc que $\frac{\delta^2 I}{\delta\alpha^2} > 0$

Montrons maintenant que la condition de Legendre est nécessaire.

Supposons que cette condition ne soit pas nécessaire c'est-à-dire qu'il y ait des points où $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} < 0$

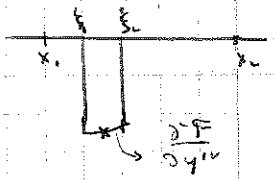
Remarque

Il faut faire l'hypothèse que F possède au moins 2 dérivées continues du 1er et second ordre.

Puisque $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ est négative continue nous aurons que

dans un intervalle ξ_1 à ξ_2 $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ reste inférieure à 0

Montrons que pour une valeur de η la condition $\Delta J \geqslant 0$ n'est pas vérifiée



A cet effet prenons pour η la fonction

$$\eta = (x-\xi_1)^2 (x-\xi_2)^2$$

avec $\xi_1 < x < \xi_2$

et $\eta = 0$ de x_1 à ξ_1 et de ξ_2 à x_2

On voit que η est une fonction toujours positive. De x_1 à ξ_1 et de ξ_2 à x_2 sa dérivée est nulle car η est elle même nulle. On peut voir qu'aux points ξ_1 et ξ_2 aussi sa dérivée est nulle.

$$\Big(\quad \eta' = 2(x-\xi_1)(x-\xi_2)^2 + 2(x-\xi_2)(x-\xi_1)^2$$

$$= 2(x-\xi_1)(x-\xi_2)\left[2x - \xi_1 - \xi_2 \right)$$

qui s'annule bien pour $x = \xi_1$ et $x = \xi_2$)

De plus la fonction est nulle aussi aux points ξ_1 et ξ_2

Par suite le calcul de

$$\frac{\delta^2 J}{\delta \alpha^2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \left[\eta' + \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + v}{\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}} \eta \right]^2 dx$$

se ramène à la même intégrale prise dans l'intervalle ξ_1 ξ_2

$$\frac{\delta^2 J}{\delta \alpha^2} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \left[\quad \right]^2 dx$$

Dans cet intervalle on a toujours que le crochet est positif (c'est un carré). On a supposé $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ négatif. Par suite l'intégrale est négative et $\frac{\delta^2 J}{\delta \alpha^2}$ aussi. On en déduit alors $\Delta J < 0$ car le signe de ΔJ avons nous dit est lié à celui de $\frac{\delta^2 J}{\delta \alpha^2}$. Or $\Delta J < 0$ est contraire à notre hypothèse puisque nous demandons un minimum. L'absurdité du résultat provient donc de la supposition que $\frac{\partial^2 J}{\partial y'^2} < 0$

Par suite on a bien que $\frac{\partial^2 J}{\partial y'^2} \geqslant 0$ est une condition nécessaire.

Nous avons donc pour un minimum les deux conditions nécessaires :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \geqslant 0$$

Arrivons maintenant aux <u>conditions suffisantes</u>.

Nous savons d'abord que

$$(\text{I}) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

est une condition suffisante. (On l'a vu p. 129)

Il est facile de voir que

$$(\text{II}) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} > 0$$

est aussi une condition suffisante

En effet si $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ est positive dans l'intervalle $x_1 x_2$, $\frac{\delta^2 I}{\delta \alpha^2}$ l'est aussi et par suite ΔI aussi

Mais ces deux conditions ne suffisent pas il faut aussi que la fonction v existe c'est-à-dire que l'équation

$$v' = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + v\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y'^2}$$

soit soluble c'est-à-dire si le second membre de l'égalité ci-dessus obéit à la condition de Lipschitz (v. II^e cah. p. 3)

<u>Remarque</u>

Cette condition est suffisante car si v existe on peut faire les considérations sur $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ comme suffisance

Mais elle n'est pas nécessaire car on peut pas le prouver. En effet si on supposait que cette condition n'était pas remplie (afin de montrer la nécessité) on ne peut ~~allors~~ rien dire sur le crochet et on ne sait pas s'il y a ou non absurdité)

On est aussi dans le même terrain d'hésitation dans le cas où

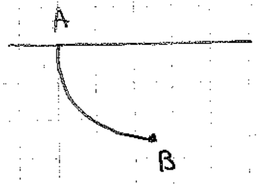
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 0$$

on ne peut voir si c'est une condition suffisante puisqu'alors $\frac{\delta^2 I}{\delta \alpha^2}$ s'annule.

On voit donc que les conditions suffisantes diffèrent des conditions nécessaires et parfois cette différence est assez grande pour donner lieu à des théories entières sur l'approfondissement des conditions suffisantes.

Ainsi on rencontre le cas $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 0$ dans les ~~expressions~~ exemples les plus simples.

Rappelons nous le problème de la brachistochrone. (v. p. 131)



Dans ce problème on avait à ~~rendre~~ rendre extremum.

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{y}} \sqrt{1+y'^2}$$ (v. p. 126)

Ici $\qquad F(x, y, y') \equiv \frac{1}{\sqrt{y}} \sqrt{1+y'^2}$

On avait trouvé pour solution la cycloïde passant par A et B et dont l'axe de déroulement était l'axe des abscisses.

Voyons maintenant si la condition était suffisante

On a :

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{y}} \quad \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = \frac{1}{\sqrt{y}} \left[\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{1}{2} \quad \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}^3} \cdot 2y' \right]$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = \frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}^3}$$

Comme on a pris le radical toujours avec le signe + car on avait à intégrer une valeur positive fois longueur de l'arc. on voit que $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ est généralement positif. Mais si $y' = \infty$ on voit que $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 0$

Or on ne sait pas si $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 0$ est une condition suffisante. On rencontre donc déjà les difficultés dans les problèmes les plus simples. Il faut donc approfondir. Nous ne ferons pas ceci pour le moment étant donné que le calcul des variations comporte des branches assez étendues.

Nous laisserons pour le moment ces problèmes pour reprendre l'étude de l'équation de Laplace ou de Dirichlet dont nous n'avons pas complètement indiqué la solution (v. p. 112, 113, 114, 115)

Nous avons rencontré l'équation de Laplace à 3 reprises :

1°/ dans les fonctions analytiques
2°/ ds les équations aux dérivées partielles du second ordre
3°/ dans le calcul des variations

En particulier dans le calcul des variations on a vu que ~~l'eulér~~ l'équation de Laplace était l'eulérienne de l'intégrale :

$$J = \iint_{(D)} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy \qquad \text{(v. p. 158)}$$

Mardi 14/5/1935

Nous parlons donc de l'intégrale

$$J = \iint_{(D)} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy$$

dont l'eulérienne est :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Nous avons rencontré cette équation dans la théorie des fonctions. Nous la trouvons dans le calcul des variations. C'est donc qu'il y a une relation entre la théorie des fonctions et le calcul des variations. Nous allons tâcher de montrer cette relation.

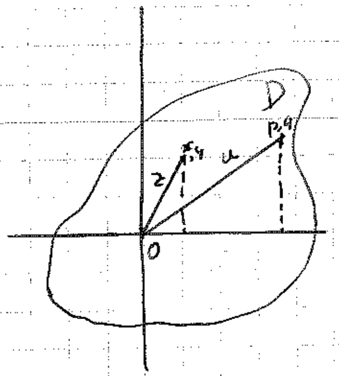
Revenons au plan complexe :

$$z = x + iy$$

Soit une fonction analytique $u(z) = p(x,y) + i\,q(x,y)$

Considérons le cercle de centre O et de rayon R. Soit K le domaine enfermé par ce cercle.
Nous savons que la fonction $u(z)$ transforme le

cercle en un certain domaine D. Ce domaine est la représentation conforme du cercle K.
Ainsi un point z, (x,y) ~~est trans~~ du cercle K est transformé en un point u (p,q) du domaine D



Puisque $u(z)$ est une fonction analytique est elle susceptible d'avoir un développement en série de puissances (II^e Cah. p. 180)
d'où :

$$u(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

On voit donc que $u(z)$ dépend des coefficients $a_0, a_1 \dots$ et par suite chaque domaine D dépend de ces coefficients puisque pour chaque $u(z)$ on a un certain domaine

Nous allons donc étudier tous les domaines D en particulier au point de vue de l'aire qu'ils couvrent. Regardons alors les coefficients.
Le coefficient a_0 n'a pas d'influence sur l'aire car sa présence ne fait subir au domaine D qu'une translation étant donné que l'on ajoute à u une valeur constante la même pour chaque u. Par suite nous pouvons prendre $a_0 = 0$ sans changer la généralité du problème
Au point de vue géométrique le fait de prendre $a_0 = 0$ montre que le point O n'est pas déplacé par la fonction $u(z)$. En d'autres termes, il reste invarié dans la transformation conforme.
En prenant $a_0 = 0$ on dit que l'on a fait une normalisation

Il y a encore une autre propriété. Après avoir fait $a_0 = 0$, on a

$$u(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

Si nous multiplions les coefficients a_i par un même nombre, $u(z)$ le sera aussi et cela ne change-ra pas le domaine D. Il sera tout simplement agrandi mais sa forme restera la même. Ainsi la forme du domaine D ne dépend pas d'un facteur commun des coefficients. Il s'ensuit que dans ces conditions on peut prendre $a_1 = 1$

et alors :

$$u(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3$$

En prenant ainsi pour $u(z)$ l'expression on obtient des domaines qui sont en substance différents

Au point de vue géométrique le fait de prendre $a_1 = 1$ montre 2 choses identiques
1° qu'autour du point O (z infiniment petit) $u(z) = z$ c'est-à-dire que les points restent invariés, (si z est un

infiniment petit on peut négliger les puissances de z supérieures à 1 par rapport à z et alors on a bien $u(z) = z$

2°/ Dérivons $u(z)$. On aura:

$$u'(z) = 1 + 2a_2 z + \ldots$$

Au point $z=0$ on aura

$$u'(0) = 1$$

Donc à l'origine la dérivée de $u(z)$ est l'unité : il n'y a pas de déformations à l'origine

Nous disons donc que

$$u(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

Chaque variation des coefficients fait varier le domaine D. Etudions maintenant l'aire de ce domaine. Cette aire peut être exprimée par l'intégrale double

$$\mathcal{I} = \iint_{(D)} dp\, dq$$

car $u(z) = p + iq$. Or p et q sont fonctions de x et y. Faisons le changement de variables en remarquant que

$$dp\, dq = dx\,dy \times \text{déterm. Jacobien de } p \text{ et } q \text{ par rapp. à } x \text{ et } y$$

Le domaine D devient le cercle K

D'où:

$$\mathcal{I} = \iint_{(K)} dx\,dy. \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Comme ~~p et q~~ $u(z)$ est une fonction analytique p et q satisfont aux conditions de Cauchy Riemann

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x}$$

(II^e Cah. p. 111)

Alors:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial y} & -\frac{\partial q}{\partial x} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2$$

D'autre part nous savons que la fonction $u(z)$ est douée de la propriété caractéristique qu'elle possède une dérivée qui est la même pour toutes les directions.

Par suite si on prend la direction des x

$$u'(z) = \frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} + i\frac{\partial q}{\partial x}$$

Considérons la quantité conjuguée de $u'(z)$.

$$\overline{u'(t)} = \frac{\partial q}{\partial y} - i\frac{\partial q}{\partial x}$$

D'où

$$u'(t)\,\overline{u'(t)} = \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Alors on a que:

$$\mathcal{I} = \iint_{(K)} u'\,\overline{u'}\,dx\,dy$$

Mais $u' = 1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots$ ou dérive z

$$\overline{u'} = 1 + 2\overline{a_2}\,\overline{z} + 3\overline{a_3}\,\overline{z}^2 + \dots$$

On peut effectuer le produit $u'\overline{u'}$ on obtient une certaine fonction de x et y car $z = z(x,y)$ et $u'\overline{u'}$ est une quantité réelle. Mais au lieu de faire ceci nous ferons encore un changement de variables: nous prendrons les coordonnées polaires:

$$z = re^{i\varphi} \qquad x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

Remarquer que:

$$dx\,dy = dr\,d\varphi \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} dr\,d\varphi = r\,dr\,d\varphi$$

et alors:

$$\mathcal{I} = \iint_{(K)} u'\overline{u'}\,r\,dr\,d\varphi = \int_0^R \int_0^{2\pi} r\,u'\overline{u'}\,dr\,d\varphi$$

car pour décrire le cercle K, r varie de 0 à R et φ de 0 à 2π.
Il faut remarquer que dans $u'\overline{u'}$ on doit faire $z = re^{i\varphi}$

Alors:

$$\mathcal{I} = \int_0^R\int_0^{2\pi} \left[1 + 2a_2 re^{i\varphi} + 3a_3 r^2 e^{2i\varphi} + \dots\right]\left[1 + 2\overline{a_2} re^{-i\varphi} + 3\overline{a_3} r^2 e^{-2i\varphi} + \dots\right] r\,dr\,d\varphi$$

car $\overline{z} = re^{-i\varphi}$

Effectuons l'intégration sur φ en regardant r comme constant. Généralement on aura à intégrer un terme provenant du produit de la forme:

$$\text{puissance de } r \times \nu a_\nu \times \mu\overline{a_\mu} \cdot e^{hi\varphi - ki\varphi}$$

On voit qu'il faut calculer $\int_0^{2\pi} e^{i(h-k)\varphi}\,d\varphi$

Mais $e^{i(h-k)\varphi} = \cos(h-k)\varphi + i\sin(h-k)\varphi$

et alors $\int_0^{2\pi} e^{i(h-k)\varphi}\,d\varphi = 0$ pourvu que $h \neq k$ car

$$\int_0^{2\pi} \cos(h-k)\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin(h-k)\varphi\,d\varphi = 0 \quad \text{pour } h = k$$

On voit donc que le résultat de l'intégration fait annuler tous les termes du produit pour lesquels $h \neq k$. Si $h=k$ on aura à trouver $\int_0^{2\pi} e^0 d\varphi$ ce qui est élémentaire : 2π

Donc on aura que :

$$\int_0^{2\pi}\left[1+2a_2re^{i\varphi}\dots\right]\left[1+2\bar{a}_2re^{-i\varphi}+\dots\right]d\varphi = 2\pi + 4a_2\bar{a}_2\cdot 2\pi r^2 + \dots$$

D'où :

$$I = \int_0^R r\,dr\cdot 2\pi\left[1+4a_2\bar{a}_2r^2+9a_3\bar{a}_3r^4+\dots n^2a_n\bar{a}_nr^{2n-2}+\dots\right]$$

$$I = \pi\left[R^2+2a_2\bar{a}_2R^4+\dots n\,a_n\bar{a}_nR^{2n}+\dots\right]$$

C'est là l'expression de l'aire. Cette expression va nous donner un théorème très important. À cet effet remarquons que tous les termes de la parenthèse sont positifs car $a_i\bar{a}_i=|a_i|^2$. Il s'ensuit que :

$$I \geqslant \pi R^2$$

($I=\pi R^2$ dans le cas où tous coefficients $a_2, a_3 \dots$ s'annulent; cela est évident car dans ce cas $u(z)=z$ et le cercle reste invarié)

Nous voyons donc qu'excepté dans le cas où les points restent invariés, chaque cercle est transformé en un domaine dont l'aire est supérieure à celle du cercle.

On peut donner à ce résultat une forme différente. En donnant aux coefficients a_i des valeurs différentes on obtient des domaines $D_1, D_2, D_3\dots$ qui sont tous les transformés du cercle, à l'aide de la fonction :

$$u(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$$

Il s'ensuit que les domaines D_1, D_2, D_3 sont eux mêmes les transformés l'un de l'autre puisque l'on peut passer de l'un à l'autre en changeant les coefficients.

Remarquons que toujours l'origine reste invariée et la dérivée de $u(z)$ en ce point est 1. On a alors le

<u>théorème</u> :

Parmi tous les domaines ~~laissant~~ dont l'un est une représentation conforme de l'autre, ~~le cercle es~~ laissant un point et sa dérivée en ce point invariée, le cercle est celui dont l'aire est minimum.

De cette façon on a trouvé une autre forme du problème fondamental :

On donne un domaine D. Trouver une fonction $u(z)$ qui transforme ce domaine en un cercle

On voit que ce problème se ramène au suivant :

Chercher la fonction qui rende minimum l'aire du domaine car on sait que le cercle est le domaine dont l'aire est minimum.

Mercredi 15/5/1935

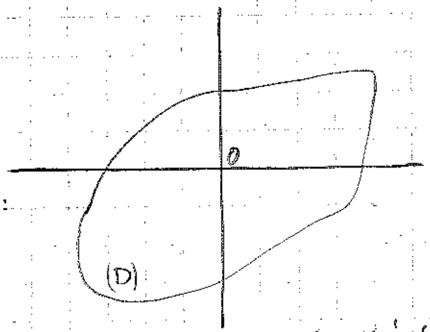
On cherchait la fonction $u(z)$ qui transforme le domaine D en un cercle. Ce problème se ramenait donc au suivant : Déterminer $u(z)$ de manière que l'intégrale

$$I = \iint_{(D)} u' \bar{u}' \, dx\,dy$$

qui représente l'aire du domaine ~~soit minimum~~ transformé de D soit minimum.

On sait que l'on peut écrire :

$$u(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$



Cette transformation laisse invariés :

le point O

la dérivée en ce point : elle égale 1

En d'autres termes la transformation laisse invarié l'élément de ligne au point O (puisque le point O et la dérivée en ce point déterminent une direction ~~dite élément de ligne~~ sur laquelle on porte un élément de droite dit élément de ligne. Puisqu'au point O la dérivée ne change pas l'élément de ligne reste invarié)

Nous cherchons donc les coefficients a_2 a_3 ... de façon que l'intégrale I ci-dessus soit minimum.

<u>Remarque</u>

Le problème que nous traitons est fondamental par rapport à la théorie des fonctions et la solution de l'équation de Laplace car nous avons trouvé la solution de l'équation de Laplace le long d'un domaine circulaire (v. p. 99 et suivantes). Si l'on parvient à trouver une fonction qui transforme un domaine quelconque en un cercle on a résolu l'équation de Laplace car on aura les valeurs de la solution à l'intérieur du cercle et de là on pourra passer au domaine grâce à la fonction $u(z)$ trouvée.

Notre problème est donc un problème du calcul des variations avec cette différence que l'on a à faire avec des fonctions complexes. Il faut remarquer aussi que l'on connaît aussi la forme générale de la fonction u cherchée

$$u(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 \cdots$$

Si nous traitons ce problème du point de vue des problèmes de variations en partant des conditions connues on arrivera à l'équation de Laplace car

$$\bar{u}u' = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2$$

et on sait que l'extrémum de

$$J = \iint_{(D)} \left[\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$$

n'est autre que l'équation de Laplace.

De cette manière on n'est nullement avancé car il faut résoudre l'équation de Laplace. Il faut donc employer une autre méthode pour arriver à la solution.

A cet effet nous emploierons la méthode directe qui s'applique justement quand on connaît la forme générale de la fonction à trouver.

(A la méthode directe s'oppose la méthode classique qui justement part des conditions générales. On peut voir que:
la méthode classique cherche une infinité continue : toutes les valeurs de la fonction $u(t)$
la méthode directe cherche une infinité dénombrable $a_1 a_2 \dots$)

La méthode directe nous donnera le moyen de calculer les coefficients $a_2 a_3 \dots$ d'une manière approchée.

Au lieu de prendre dans le développement de $u(z)$ un nombre infini de termes, nous supposerons que $u(z)$ est un polynome fini de degré n

$$u(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots a_n z^n$$

Nous tâcherons de calculer dans ces conditions les coefficients $a_2 a_3 \dots a_n$. Il est donc évident que l'on aura des résultats approchés puisqu'on néglige tous les termes après ~~les~~ $a_n z^n$

Alors on a:

$$u'(t) = 1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots n a_n z^{n-1}$$

$$\overline{u'(t)} = 1 + 2\bar{a}_2 \bar{z} + 3\bar{a}_3 \bar{z}^2 + \dots n \bar{a}_n \bar{z}^{n-1}$$

D'où:

$$J = \iint_{(D)} [1 + 2a_2 z + \dots n a_n z^{n-1}][1 + 2\bar{a}_2 \bar{z} + \dots n \bar{a}_n \bar{z}^{n-1}]\, dx\,dy$$

On voit donc que J est une fonction de $2(n-1)$ variables:

$$a_2, \bar{a}_2,\ a_3, \bar{a}_3 \dots a_n, \bar{a}_n$$

à déterminer par certaines conditions.

174

Remarquons que :

1°/ I est toujours positive car : $I = \iint_{(D)} u'\bar{u}'\, dx\,dy$ et

$u'\bar{u}'$ toujours positif

2°/ I est du second degré par rapport à a_i et $\bar{a}_i$ car les deux crochets sont tous les deux linéaires par rapport à a_i et $\bar{a}_i$.

En cherchant à rendre I minimum, nous rendons minimum une fonction positive du second degré. On a vu dans le cours de l'année précédente que dans ces conditions I a toujours un minimum donné par les équations obtenues en égalant à 0 les dérivées partielles de I par rapport à chaque variable.

Alors sont donc :

$$\frac{\partial I}{\partial \bar{a}_K} = K \iint_{(D)} \left[1 + 2a_2 z + \cdots n a_n z^{n-1} \right] \bar{z}^{K-1} dx\,dy = 0$$

L'intégrale ci-dessus est une intégrale à effectuer généralement sur :

$$z^{\nu} \bar{z}^{\mu}$$

Si nous posons par abréviation :

$$Z_{\nu\mu} = \iint_{(D)} z^{\nu} \bar{z}^{\mu}\, dx\,dy$$

$$\frac{\partial I}{\partial \bar{a}_K} = K \left[Z_{0\,K-1} + 2\, Z_{1\,K-1}\, a_2 + 3\, Z_{2\,K-1} \cdots + n\, Z_{n\,K-1}\, a_n \right] = 0$$

Comme K varie de 2 à n on aura ainsi en faisant :

$$K = 2, 3, 4, \ldots n$$

n-1 équations

D'autre part en dérivant par rapport à a_K on aura remarquant que les indices de $Z_{\nu\mu}$ sont intervertis car alors les z sont transformés en $\bar{z}$ et inversement on aura :

$$Z_{K-1\,0} + 2\, Z_{K-1\,1}\, \bar{a}_2 + 3\, Z_{K-1\,2}\, \bar{a}_3 \ldots + n\, Z_{K-1\,n}\, \bar{a}_n = 0$$

K varie toujours de 2 à n

On a ainsi n-1 nouvelles équations

Entout cas Donc :

$2(n-1)$ équations. D'autre part si on remplace ci-dessus a_λ par

$$a_\lambda = \alpha_\lambda + i\beta_\lambda$$
$$\bar{a}_\lambda = \alpha_\lambda - i\beta_\lambda$$

on aura $2(n-1)$ équations pour les $2(n-1)$ inconnues α_λ et β_λ $(\lambda = 2, 3, \dots n)$

Le déterminant est généralement différent de 0 et on peut ainsi résoudre un tel système et avoir les coefficients cherchés et ainsi le problème d'analyse est ramené à un problème d'algèbre.

Seulement on a supposé connaître les $Z_{\nu\mu}$. Il est vrai qu'on a posé :

$$Z_{\nu\mu} = \iint_{(D)} z^\nu \bar{z}^\mu \, dx\, dy$$

Mais le calcul des $Z_{\nu\mu}$ peut devenir compliqué si le domaine D est lui même compliqué.

Ainsi on peut en général trouver les coefficients a_λ. Rappelons nous toujours que ces résultats sont approchés car on devrait avoir un nombre infini de coefficients ce qui demanderont la solution d'un nombre infini d'équations à un nombre infini d'inconnues, problème qui n'est plus du ressort de l'algèbre mais de celui de l'analyse supérieure.

Nous allons approfondir le problème en touchant la question des conditions d'existence : voir s'il existe toujours une fonction $u(t)$ qui transforme un domaine donné en un cercle.

Nous allons démontrer à cet effet le théorème de Riemann.

Sous certaines conditions il existe toujours une fonction $u(t)$ qui transforme en un cercle un domaine donné.

Jeudi 16/5/1935

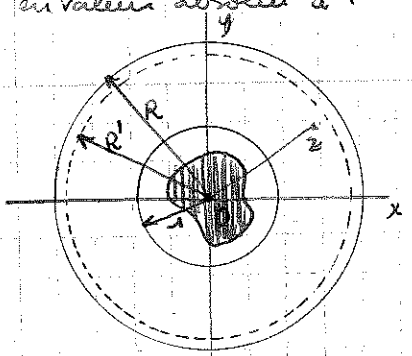
Avant de démontrer le théorème de Riemann, démontrons le lemme suivant dit : ~~le~~

Lemme de Schwarz

Soit dans le plan z un cercle de rayon R centré sur O et soit le cercle unitaire.

Chaque fonction analytique donne une représentation

conforme du cercle R. Supposons que pour $|z| < R$, $|u(z)| < 1$ c'est-à-dire que l'on ait que $u(z)$ est inférieure en valeur absolue à 1 pour tous les points du cercle R.



Dans ces conditions la fonction $u(z)$ transforme le cercle R en un domaine D qui sera intérieur au cercle unitaire car $|u(z)| < 1$.

Supposons de plus que $u(0) = 0$. Considérons un point de la circonférence de cercle R. Par la fonction $u(z)$ ce point sera rapproché de l'origine O car $|u(z)| < 1$ et la réduction de la distance sera au moins dans le rapport R:1 car ce rapport réduit le cercle R au cercle unitaire et comme le domaine D est intérieur à ce cercle on aura bien que la réduction de la distance à l'origine s'effectuera au moins dans le rapport ~~1:R~~ R:1

Le lemme de Schwarz dit que: Ce dernier fait subsiste pour tous les points du cercle R (à l'intérieur)

Pour démontrer ceci considérons la fonction

$$\varphi(z) = \frac{u(z)}{z}$$

Cette fonction $\varphi(z)$ est une fonction analytique. En effet comme $w(z)$ est une fonction analytique $\varphi(z)$ est une fonction analytique pour tous les points où z ne s'annule pas. Mais au point $z=0$ on a que $w(0) = 0$ et ainsi $\varphi(0)$ reste indéterminé.

En appliquant la règle de l'Hospital on voit facilement que:

$$\varphi(0) = u'(0)$$

Comme $w(z)$ est une fonction analytique, elle possède une dérivée et ainsi $\varphi(0)$ est une valeur déterminée. Par suite on voit que $\varphi(z)$ est une fonction analytique

Considérons un cercle de rayon R', tel que $R < R'$. Pour tous les points de la circonférence R' on a:

$$|z| = R'$$

Alors:

$$|\varphi(z)| = \frac{|u(z)|}{|z|} = \frac{|u(z)|}{R'} < \frac{1}{R'} \quad \text{car}$$

$$|w(z)| < 1 \qquad \text{par hypothèse}$$

Or $\varphi(z)$ est une fonction analytique. Par suite les valeurs maximums de $\varphi(z)$ se trouvent sur le contour (v p.113)

et alors de ~~l'égale~~ l'inégalité:

$$|\varphi(z)| < \frac{1}{R'}$$

nous déduisons que toutes les valeurs de $|\varphi(z)|$ sont inférieures à $\frac{1}{R'}$ puisque $\frac{1}{R'}$ est pour ainsi dire une borne supérieure.

Nous pouvons maintenant augmenter R' jusqu'à R. Les mêmes considérations s'appliqueront et on aura à la limite quand R'=R.

$$|\varphi(z)| \leq \frac{1}{R}$$

or : $$|\varphi(z)| = \left|\frac{u(z)}{z}\right|$$

D'où : $$|u(z)| \leq \frac{|z|}{R}$$

On voit donc que les points z sont réduits par u(z) dans le rapport

$$\frac{|z|}{R} \quad \text{ou} \quad \frac{|z|}{|u(z)|} \leq \frac{R}{1}$$

ce qui démontre le théorème.

Cas particulier

Dans le cas où R=1, (le cercle se confond avec le cercle unitaire) on déduit :

$$|u(z)| < |z|$$

On a donc que tous les points s'approchent de l'origine et le cercle unitaire est transformé en un domaine intérieur au cercle.

Conséquences

I - Puisque $|\varphi(z)| \leq \frac{1}{R}$ partout on a que :

$$|\varphi(0)| \leq \frac{1}{R} \quad \text{ou}$$

$$|u'(0)| \leq \frac{1}{R}$$

La dérivée au centre reste inférieure à $\frac{1}{R}$. –

Dans le cas particulier où R=1, on voit que la dérivée au centre reste inférieure à l'unité.

II. – Au début du cours sur la théorie des fonctions nous avons traité l'exemple suivant : transformer le cercle unitaire en lui même. (v. II^e Cah. p. 158)

On avait trouvé :

$$u(z) = e^{i\vartheta}\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1} \quad \text{ou} \quad u(z) = e^{i\vartheta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$$ (c'est la même chose à 1 signe près)

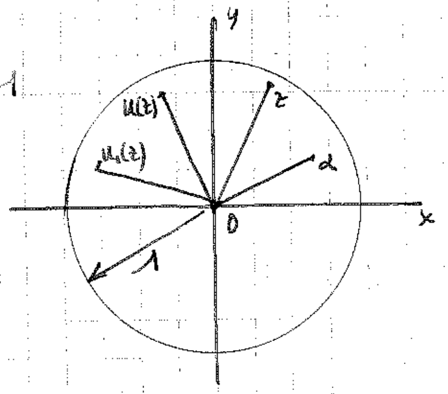
α était le point se transformant en l'origine. En d'autres

termes $u(\alpha) = 0$

Nous avons dit que cette solution était la plus générale. Mais nous ne l'avons pas prouvé car il se pourrait qu'il y eut une transformation non linéaire qui donne le même résultat. Aussi nous montrerons à l'aide du Lemme de Schwarz que la solution ci-dessus est la plus générale en ce sens qu'une autre solution égale la solution ci-dessus multipliée par une constante ou qu'en valeur absolue il n'existe pas d'autre solution que celle qui a été trouvée.

En effet soit une autre fonction $u_1(t)$ qui transforme le cercle unitaire en lui même et qui transforme le point α en l'origine. On aura que :

$$u_1(\alpha)=0 \quad \text{et} \quad |u_1(z)| = 1 \quad \text{si} \quad |z|=1$$



$u(z)$ transforme le cercle en lui même et α en 0

$u_1(z)$ transforme aussi le cercle en lui même et α en 0

Nous pouvons donc considérer la transformation de $u(z)$ en $u_1(z)$. Cette transformation transforme toujours le cercle unitaire en lui même et laisse l'origine invariée car :

$$u(\alpha) = u_1(\alpha) = 0$$

Mais comme on a toujours que :

$$|u(z)| < 1 \quad \text{et} \quad |u_1(z)| < 1$$

on peut appliquer le Lemme de Schwartz. On aura en conséquence

$$|u(z)| \leq |u_1(z)| \qquad \text{car ici } R=1$$

Mais au lieu de considérer la transformation de $u(z)$ en $u_1(z)$ on peut considérer celle de $u_1(z)$ en $u(z)$; les mêmes considérations s'appliquent et on arrive au résultat :

$$|u_1(z)| \leq |u(z)|$$

On voit donc que : $\quad |u(z)| = |u_1(z)|$

ce qui montre que :

$$u_1(z) = u(z) \cdot e^{i\theta_1} \qquad \theta_1 = \text{cte}$$

Par suite la forme générale de la fonction reste la même.

III Soit une fonction $\varphi(z)$ qui soit inférieure à 1 en valeur absolue pour $|z|<R$, R étant le rayon d'un cercle.

$$|\varphi(z)| < 1$$

Nous ne pouvons pas appliquer le lemme de Schwartz car nous ne faisons aucune supposition sur le fait que $\varphi(0)=0$.

Considérons la fonction :

$$u(z)= \frac{\varphi(z)-\varphi(0)}{1-\bar{\varphi}(0)\varphi(z)}$$ (transformation analogue à : $u(z)=\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$)

Montrons que $u(z)$ remplit les conditions de Schwartz. En effet on a bien que :

$u(0)= 0$ (numérateur$=0$, dénom. $\neq 0$)

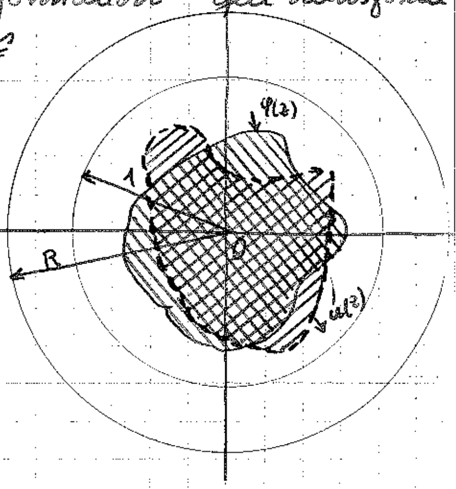
De plus pour arriver à $u(z)$ nous transformons d'abord z en $\varphi(z)$ ce qui donne un domaine à l'intérieur du cercle unitaire car :

$|\varphi(z)|<1$

Après on transforme $\varphi(z)$ en $u(z)$ par la transformation qui transforme le cercle unitaire en lui même. Par suite la transformation $u(z)$ donne un domaine toujours intérieur au cercle unitaire. Par suite on a bien que :

$$|u(z)|<1$$

Ainsi $u(z)$ remplit bien les conditions de Schwarz. On peut donc appliquer le lemme. On aura :



$$\left|\frac{\varphi(z)-\varphi(0)}{1-\bar{\varphi}(0)\varphi(z)}\right| \leq \frac{|z|}{R}$$

Lundi 20 | 5 | 1935

On a trouvé l'inégalité :

$$\left|\frac{\varphi(z)-\varphi(0)}{1-\bar{\varphi}(0)\varphi(z)}\right| \leq \frac{|z|}{R}$$

Par abréviation nous poserons

$$\varphi(z)=\varphi \qquad \varphi(0)=\varphi_0$$

D'où : $$\left|\frac{\varphi-\varphi_0}{1-\bar{\varphi}_0\varphi}\right| \leq \frac{|z|}{R}$$

ou $$|\varphi-\varphi_0| \leq \frac{|z|}{R}|1-\bar{\varphi}_0\varphi|$$

Mais on peut écrire :

$$1-\bar{\varphi}_0\varphi = 1-\bar{\varphi}_0\varphi_0 - \bar{\varphi}_0(\varphi-\varphi_0)$$

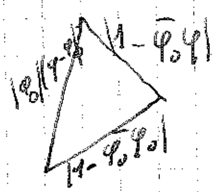
[on a simplement ajouté et retranché $\bar{\varphi}_0\varphi$]

Il s'agit de calculer la valeur absolue de $1-\bar{\varphi}_0\varphi$.
Or nous pouvons dire que puisque $1-\bar{\varphi}_0\varphi$ égale la différence de 2 expressions

$$1-\bar{\varphi}_0\varphi_0 \quad \text{et} \quad \bar{\varphi}_0(\varphi-\varphi_0)$$

on aura sûrement que:

$$|1-\bar{\varphi}_0\varphi| \leqq |1-\bar{\varphi}_0\varphi_0| + |\varphi_0||\varphi-\varphi_0|$$



à partir de la propriété que dans un triangle un côté est plus petit que la somme des deux autres

Comme: $\bar{\varphi}_0\varphi_0 = |\varphi_0|^2$ on aura que:

$$|1-\bar{\varphi}_0\varphi| \leq |1-|\varphi_0|^2| + |\varphi_0||\varphi-\varphi_0|$$

Or nous avons dit que $|\varphi(z)| \leq 1$ pour $|z|<R$
par suite

$$|\varphi_0|^2 < 1$$

et alors au lieu de $|1-|\varphi_0|^2|$ on peut simplement mettre des crochets:

$$[1-|\varphi_0|^2]$$

On a trouvé:

$$|\varphi-\varphi_0| \leqq \frac{|z|}{R}|1-\bar{\varphi}_0\varphi|$$

Remplaçons $|1-\bar{\varphi}_0\varphi|$ par l'expression trouvée ci-dessus. Nous aurons:

$$|\varphi-\varphi_0| \leqq \frac{|z|}{R}[1-|\varphi_0|^2] + \frac{|z|}{R}|\varphi_0||\varphi-\varphi_0|$$

D'où l'on tire:

$$|\varphi-\varphi_0| \leqq \frac{\frac{|z|}{R}}{1-\frac{|z|}{R}|\varphi_0|}[1-|\varphi_0|^2]$$

Supposons que nous supprimions le $|\varphi_0|$ du dénominateur. Comme $\frac{|z|}{R}$ et $|\varphi_0|$ sont inférieurs à 1, le produit par $|\varphi_0|$ de $\frac{|z|}{R}$ fait diminuer $\frac{|z|}{R}$, et la différence $1-\frac{|z|}{R}|\varphi_0|$ diminue quand on supprime $|\varphi_0|$. Par suite la fraction augmente car son dénominateur diminue. Alors on peut écrire:

$$(2) \qquad |\varphi-\varphi_0| \leqq \frac{\frac{|z|}{R}}{1-\frac{|z|}{R}}[1-|\varphi_0|^2]$$

On voit donc que la différence $\varphi-\varphi_0$ possède en valeur absolue une borne supérieure qui ne dépend que de $|\varphi_0|$ et non de φ

Autres conséquences

A/ Soit une fonction $u(z)$ qui soit
$$|u(z)| \leq 1 \quad \text{dans le cercle } |z| < R$$
et supposons aussi l'origine invariée:
$$u(0)=0$$
On pourra donc appliquer à $u(z)$ le Lemme de Schwarz
Auparavant considérons la fonction

$$\varphi(z) = \frac{u(z)}{z} \cdot R$$

Remarquons que $\varphi(0) = \frac{0}{0} = R \lim_{z \to 0} \frac{u'(z)}{1} = R u'(0) = R u'_0$

D'autre part on peut écrire:

$$u(z) = \frac{z}{R} \varphi(z)$$

Appliquons le lemme de Schwarz à $u(z)$. Nous aurons:

$$|u(z)| = \frac{|z|}{R} |\varphi(z)| \leq \frac{|z|}{R}$$

On voit que:
$$|\varphi(z)| \leq 1$$

On voit donc que l'on peut appliquer à $\varphi(z)$ la 3e conséquence. Nous aurons:

$$|\varphi - \varphi_0| \leq \frac{\frac{|z|}{R}}{1 - \frac{|z|}{R}} [1 - |\varphi_0|^2] \quad \text{ou}$$

$$\left|R\frac{u}{z} - R u'_0\right| \leq \frac{\frac{|z|}{R}}{1 - \frac{|z|}{R}} [1 - R^2 |u'_0|^2]$$

Multiplions les 2 membres par la quantité positive $\frac{|z|}{R}$; on aura

$$(3) \quad |u - u'_0 z| \leq \frac{\frac{|z|^2}{R^2}}{1 - \frac{|z|}{R}} [1 - R^2 |u'_0|^2]$$

On voit donc que la différence $u - u'_0 z$ possède aussi une borne supérieure ne dépendant que de u'_0 et de z.
Remarquons que:
$u - u'_0 z$ est la différence entre u et le 1er terme de son développement. En effet:
$$u = u(0) + u'(0) z + \frac{1}{2} u''(0) z^2 \dots$$
Or $u(0)=0$; $u'(0) = u_0$ on aura bien
$$u = u'_0 z + \dots$$
On dit que la différence linéaire de $u(t)$ possède ~~la~~ la borne supérieure ci-dessus

B/ Nous avons trouvé que
$$\left|\frac{\varphi - \varphi_0}{1 - \varphi_0 \varphi}\right| \leq \frac{|z|}{R}$$
Examinons cette inégalité du point de vue géométrique

Supposons déterminés φ_0 et R. Pour chaque z donné nous aurons plusieurs probabilités pour φ car on a ci-dessus une inégalité entre z et φ. De cette manière on a tout de même une restriction pour les valeurs de φ. Il s'ensuit que pour un z il correspond un certain domaine de valeurs de φ. Proposons nous de trouver une borne pour $|\varphi|$. A cet effet examinons la transformation

$$\left|\frac{\varphi - \varphi_0}{1 - \bar{\varphi}\varphi_0}\right| \leqq \frac{|z|}{R}$$

S'il y avait le signe égal on pourrait voir facilement que la relation qui relie $\frac{|z|}{R}$ à φ est celle qui laisse le cercle unitaire invarié. L'inégalité ci-dessus montre que l'on a une transformation à l'intérieur du cercle unitaire. Par suite pour avoir le maximum de $|\varphi|$ il suffira donc d'écrire que l'on a une transformation du cercle unitaire en cercle unitaire et d'écrire que

$$\frac{\varphi_{max} - \varphi_0}{1 - \bar{\varphi}\varphi_0} = \frac{z}{R}$$

On tire de là :

$$\varphi_{max} = \frac{\varphi_0 + \frac{z}{R}}{1 + \frac{z}{R}\varphi_0}$$

On en déduit que :

$$|\varphi| \leqq \frac{|\varphi_0| + \frac{|z|}{R}}{1 + \frac{|z|}{R}\varphi_0}$$

On a ainsi trouvé la borne supérieure de $|\varphi|$.

Montrons que cette borne est inférieure à 1 (si elle était supérieure à 1, le résultat serait sans intérêt car on sait déjà que $\varphi(t) < 1$)

Nous savons que :

$$|\varphi_0| \leqq 1 \qquad \frac{|z|}{R} < 1$$

Posons donc $\alpha = |\varphi_0|$ $\qquad \beta = \frac{|z|}{R}$ avec

$$0 \leq \alpha \leq 1 \qquad 0 \leq \beta \leq 1$$

On a la fraction

$$v(\alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}$$

Donnée que $\alpha \leq 1$ et $\beta \leq 1$

Remarquons que $v(0,0) = 0$
De plus v est une fonction croissante de $0 \leq \frac{\alpha}{\beta} < 1$
En effet :

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \frac{(1+\alpha\beta) - (\alpha+\beta)\beta}{(1+\alpha\beta)^2} = \frac{1-\beta^2}{(1+\alpha\beta)^2}$$

On voit que si $\beta < 1$ $\frac{\partial v}{\partial \alpha}$ est toujours positive
On a par raison de symétrie que

$$\frac{\partial v}{\partial \beta} = \frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha\beta)^2}$$

De même on voit que si $\alpha < 1$ on a que

$\frac{\partial v}{\partial \beta}$ est toujours positive

Il s'ensuit que pour α et β inférieurs à 1 la fonction est toujours croissante. Elle s'annule à l'origine. Au point $\alpha = 1$ $\beta = 1$ qui est le point extrême de l'intervalle 0 1 on a que:

$$v(1,1) = 1$$

C'est un point extrême car en ce point $\frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0$ et $\frac{\partial v}{\partial \beta} = 0$ Or comme avant ce point la fonction v était croissante on voit que ce point est un maximum pour la fonction v et par suite on aura bien que pour

$$0 < \alpha < 1$$
$$0 < \beta < 1$$

$$v(\alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta} < 1 \qquad \text{ou}$$

$$\frac{|\varphi_0| + \frac{|z|}{R}}{1 + \frac{|z|}{R}\varphi_0} < 1$$

Par suite la borne supérieure de φ est bien inférieure à 1

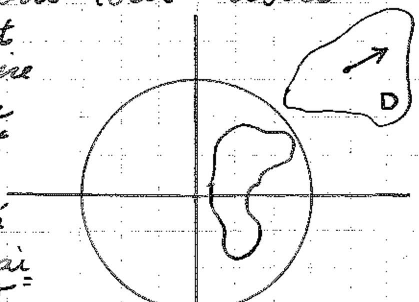
Mercredi 22/5/1935

Nous avons maintenant tout ce qui est nécessaire pour démontrer le théorème fondamental de représentation conforme ou de Riemann. C'est le suivant :

On donne dans le plan un certain domaine D, un point de ce domaine et une direction passant par ce point. Le théorème dit :

il existe une fonction $u(z)$ et une seule qui transforme le domaine D en cercle unitaire, le point donné en origine et la direction passant par le point en direction des x.

Pour démontrer le théorème nous allons tout d'abord effectuer une transformation : en multipliant z par une valeur convenable α, on réduira le domaine D en un domaine intérieur au cercle unitaire (on prend α suffisamment petit).



Dans ce cas le point est transformé en un point à l'intérieur du cercle unitaire. Nous appliquons maintenant au nouveau domaine la transformation qui transforme le cercle unitaire en cercle unitaire et le point donné en origine.

Quant à la direction primitive, on peut facilement en donner la direction des l'axe des x en multipliant les z par un facteur de rotation convenable : $e^{i\theta}$ où θ est une constante réelle.

Tout ceci ne change rien au problème qui se ramène au suivant :

On a un domaine intérieur au cercle unitaire, comprenant l'origine. On cherche une certaine fonction qui transforme le domaine en cercle unitaire, laissant invariées l'origine et la direction des x. (si la direction des x reste invariée, il en est de même de toutes les directions d'après la propriété de la dérivée d'une fonction analytique)

Analytiquement le fait que l'origine et la direction restent invariées se traduit par :

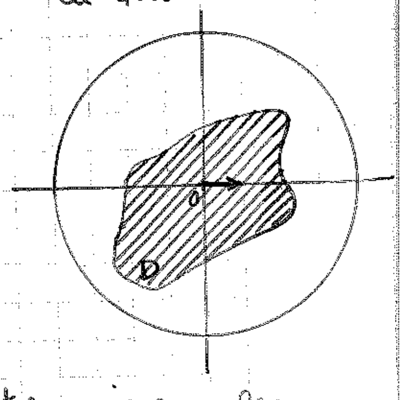
$$v(0) = 0 \qquad v'(0) = \text{entier positif} \qquad [v(x) = \text{fonct. cherchée}$$

En effet la 1ère égalité est évidente. Arrivons à la seconde. Pour que les directions restent invariées il faut d'abord que $v'(0)$ soit une constante réelle et de plus pour que les directions soient conservées dans le même sens, il faut que $v'(0)$ soit positif.

Remarque

La démonstration du théorème donne comme conséquence la solution du problème de Dirichlet : $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ sur un domaine quelconque. En effet il suffit de transformer le domaine en cercle unitaire et appliquer au cercle la solution déjà trouvée (p.104)

Il faut donc démontrer le théorème. Le théorème se démontrera de cette manière :



Par une série de transformations, on transformera le domaine D en des domaines $D_1, D_2, \dots D_n$

et l'on montrera que le domaine D_n tend vers le cercle quand n augmente indéfiniment.

Il faut donc tout d'abord déterminer les fonctions $v_1(t)$ $v_2(t) \dots$ qui fournissent les transformations $D_1, D_2, D_3 \dots$

Pour y arriver, rappelons nous le Lemme de Schwarz. Appliquons le dans le cas où $R=1$: ainsi soit une fonction $u(t)$ telle que

$$|u(t)| < 1 \text{ pour } |t| < 1$$

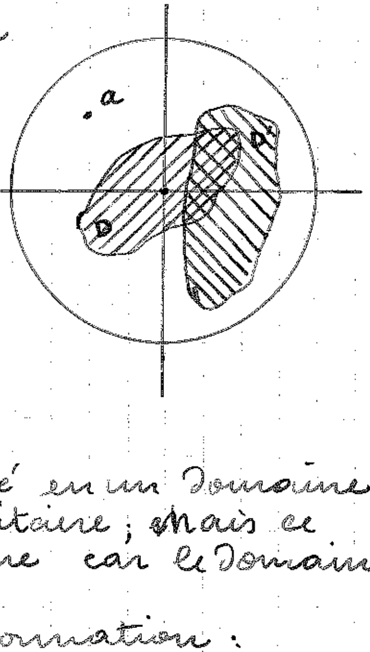
le lemme de Schwarz donne que :

$$\left|\frac{u(z)}{z}\right| < 1 \qquad \text{ou} \qquad |u(z)| < |z|$$

ce fait s'exprime géométriquement de cette façon : chaque point z est rapproché du centre par la transformation $u(z)$.

Supposons que nous considérions la fonction inverse de $u(z)$. Cette fonction éloignera du centre chaque point u puisque $u(z)$ les rapproche.
Le domaine D possède un point situé à la distance minimum de l'origine (sur le contour). Si $v_1(z)$ est la transformation inverse de $u(z)$ nous savons qu'à l'aide de la transformation $v_1(z)$ cette distance minimum sera transformée en une distance égale et généralement supérieure.
Considérons maintenant la suite des fonctions
$v_1(z)$, $v_2(z)$, ...
Nous savons que ces fonctions font augmenter la distance minim à l'origine. Mais il se peut alors que les domaines $D_1, D_2 \ldots$ sortent hors du cercle unitaire. Mais si nous astreignons les v_i à varier de telle sorte que les domaines D_i restent toujours à l'intérieur du cercle unitaire, nous aurons que chaque point du contour de D_i tendra vers la circonférence et notre problème sera résolu. Voilà l'idée générale de la démonstration.

Passons maintenant aux calculs. Il s'agit de déterminer les fonctions v_i.
A cet effet considérons la transformation



$$z' = \frac{a - z}{1 - \bar{a} z}$$

z sont les points du domaine D.
a est un point hors du domaine D

La transformation ci-dessus est la transformation qui transforme le cercle unitaire en lui même et le point a en origine,
alors le domaine D sera transformé en un domaine D' toujours intérieur au cercle unitaire ; mais ce domaine ne comprend pas l'origine car le domaine D ne comprend pas le point a.
Maintenant considérons la transformation :

$$z'' = \sqrt{z'}$$

Il est vrai que cette transformation n'est pas univoque car il y a le double signe. Mais on peut la rendre univoque en ne prenant qu'un seul signe

- 186

Mais il y aurait la difficulté au point $z'=0$ car alors on ne sait rien quant aux signes (les signes confondus). Mais nous avons exclu cette difficulté car le point $z'=0$ n'appartient pas au domaine D'. Aussi la transformation z'' donne un nouveau domaine D''.

Appliquons maintenant la transformation :

$$z''' = \frac{\sqrt{a} - z''}{1 - \sqrt{a}\, z''}$$

Cette transformation laisse invarié le cercle unitaire et transforme le point $\sqrt{a}$ en origine. On aura un domaine D'''

Considérons enfin la transformation :

$$z_1 = e^{i \arg u \sqrt{a}}\, z'''$$

Comme $z' = z'(z)$, $z'' = z''(z')$, $z''' = z'''(z'')$.

$z_1 = z_1(z''')$ on voit que

$$z_1 = z_1(z) = v_1(z)$$

Nous disons que la fonction $v_1(z)$ remplit nos conditions

1° Cette fonction est l'inverse d'une fonction remplissant les conditions de Schwarz

Pour montrer ceci, il faut prendre l'inverse de $v_1(z)$ et montrer que cet inverse reste inférieur à 1 en valeur absolue si $|z_1| < 1$

Pour avoir l'inverse de :

$$v_1(z) = z_1 = e^{i \arg u \sqrt{a}}\, z'''$$

nous disons que nous passons de z_1 à z''' par rotation ce qui n'influe pas sur les valeurs absolues de z_1 et z'''.

De z''' on passe à z'' par une transformation linéaire qui transforme le cercle unitaire en lui-même. Il est évident que cette transformation ne fait pas dépasser l'unité à $|z''|$ puisque $|z'''| < 1$ car $|z_1| < 1$

De ~~{z''}~~ on passe à z' par la transformation :

$$z' = z''^2$$

Mais $|z''|$ est une fraction proprement dite

puisque $|z'| = |z''^2|$, $|z'|$ le sera aussi.

On a donc bien $|z'| < 1$

Enfin de z' on passe à z par la transformation du cercle unitaire en lui même ce qui laisse toujours

$$|z| = |u_1(z_1)| < 1$$

Ainsi on a bien $|u_1(z_1)| < 1$ si $|z_1| < 1$

2°/ Montrons que la transformation $v_1(z)$ ne fait pas dépasser le cercle au domaine D_1 transformé de D

Il faut montrer que $v_1(z)$ reste aussi inférieur à 1 en valeur absolue pour $|z| < 1$

Or si $|z| < 1$, $|z'|$ l'est aussi
D'autre part :

$$z'' = \sqrt{z'}$$

Si $|z'| < 1$ $|z''| < 1$ aussi car tous les deux sont des fractions proprement dites

Mais si $|z''| < 1$ $|z'''| < 1$ l'est aussi (transformation du cercle unitaire en lui même)

et si $|z'''| < 1$, $|z_1| < 1$ aussi (évident)

On a donc bien $|v_1(z)| < 1$

3°/ L'origine reste invariée.

En effet :

de z' à z l'origine se transforme en a (si $z=0$, $z'=a$)

de z' à z'' ~~l'origine~~ le pt a " " en $\sqrt{a}$ (car $z'' = \sqrt{z'}$)

De z'' à z''' ~~l'origine~~ le pt $\sqrt{a}$ " en origine (transf. connue)

de z''' à z_1 l'origine reste invariée. On a donc bien $v_1(0) = 0$

4°/ La direction reste invariée

Pour montrer ceci il faut montrer que $\frac{dz_1}{dz}$ au point 0 est une valeur réelle positive

Or :

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{dz_1}{dz'''} \cdot \frac{dz''}{dz''} \cdot \frac{dz'}{dz'} \cdot \frac{dz'}{dz}$$

(l'élément est constamment changé de direction)

On a :

$$z' = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z} = (a - z)(1 + \bar{a}z + \cdots) = a + z(a\bar{a} - 1) + \cdots$$

$$\left(\frac{dz'}{dz}\right)_{z=0} = a\bar{a} - 1$$

$$\frac{dz''}{dz'} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{z'}}$$

Or si $z = 0$, $z' = a$, $z'' = \sqrt{a}$, $z''' = 0$, $z_1 = 0$

$$\left(\frac{dz''}{dz'}\right)_{z'=a} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\frac{dz'''}{dz''} = \frac{-1}{1 - \sqrt{\bar{a}}z''} + \frac{(\sqrt{a} - z'')\cdot\sqrt{\bar{a}}}{(1 - \sqrt{\bar{a}}z'')^2} \quad ; \text{ d'où}$$

$$\left(\frac{dz'''}{dz''}\right)_{z'' = \sqrt{a}} = \frac{-1}{1 - \sqrt{a}\sqrt{\bar{a}}} + 0 = \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{\bar{a}} - 1}$$

$$\frac{dz_1}{dz'''} = e^{i \arg \sqrt{a}}$$

D'où :

$$\left(\frac{dz_1}{dz}\right)_{z=0} = (a\bar{a} - 1)\frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{\bar{a}} - 1} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a}} e^{i \arg \sqrt{a}}$$

La fraction $\frac{a\bar{a} - 1}{\sqrt{a}\sqrt{\bar{a}} - 1}$ est une quantité réelle et positive ; en effet $a\bar{a}$ et $\sqrt{a}\sqrt{\bar{a}}$ sont des nombres réelles et comme $|a| < 1$ $a\bar{a} - 1 < 0$ et $\sqrt{a}\sqrt{\bar{a}} - 1 < 0$ de sorte que :

$$\frac{a\bar{a} - 1}{\sqrt{a}\sqrt{\bar{a}} - 1} > 0$$

Il reste $\frac{1}{\sqrt{a}} e^{i \arg \sqrt{a}}$

Mais $\frac{1}{\sqrt{a}} = \left|\frac{1}{\sqrt{a}}\right| e^{-i \arg \sqrt{a}}$

car puisque $\sqrt{a}$ et $\frac{1}{\sqrt{a}}$ sont des valeurs réciproques, leurs arguments sont égaux et de signes contraires.

Par suite : $\frac{1}{\sqrt{a}} e^{i \arg \sqrt{a}} = \left|\frac{1}{\sqrt{a}}\right|$

On voit donc que $\left(\frac{dz_1}{dz}\right)_{z=0}$ est bien une valeur positive réelle :

$$v_1'(0) > 0$$

On voit ainsi que ~~toute~~ la fonction $v_1(z)$ satisfait à toutes nos conditions.

Jeudi 23 |5|1935

En tirant $z_1 = v_1(z)$ directement en fonction de z on obtient :

$$z_1 = e^{i \arg \sqrt{a}} \frac{\sqrt{a} - \sqrt{\frac{a-z}{1-\bar{a}z}}}{1 - \sqrt{\bar{a}}\sqrt{\frac{a-z}{1-\bar{a}z}}}$$

Nous désignerons cette fonction par $v_1(z, a)$ pour montrer que v_1 dépend du paramètre a. a est un point extérieur au domaine D

Maintenant considérons la fonction

$$z_2 = v_1(z_1, a_1)$$

c'est la fonction obtenue en faisant à la fonction z_1 la transformation v_1 et en remplaçant a par un autre point a_1 toujours extérieur au domaine D_1 transformé de D.

Il est donc évident que puisque $v_1(z, a)$ remplit nos conditions, $v_1(z_1, a_1)$ le fera aussi.

Comme ~~z~~ z_1 est fonction de z on aura que $v_1(z_1, a_1)$ sera une certaine fonction $v_2(z)$

et ainsi on aura :

$$z_2 = v_1(z_1, a_1) = v_2(z)$$

Nous allons donc considérer la suite des fonctions

$$z_1 = v_1(z, a) = v_1(z)$$

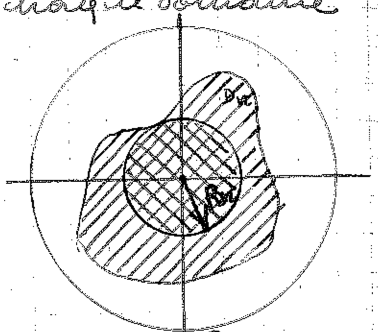
$$z_2 = v_1(z_1, a_1) = v_2(z)$$

$$z_3 = v_1(z_2, a_2) = v_3(z)$$

$$- - - - - - - - -$$

$$z_{n+1} = v_1(z_n, a_n) = v_{n+1}(z)$$

Ces fonctions remplissent nos conditions et ainsi chaque fois le domaine D est transformé successivement en des domaines intérieurs au cercle unitaire. De plus comme ces fonctions sont des inverses des fonctions de Schwarz, les distances minima de chaque domaine croissent et ainsi on est sûr que la distance minimum du domaine D_{n+1} sera supérieure à celle du domaine D_n. Désignons par $R_1, R_2, R_3 \dots R_{n+1}$ les distances minimums des domaines $D_1, D_2, \dots D_{n+1}$. Il est sûr donc que les R_v augmentent. Mais il faut montrer qu'ils augmentent sans arrêt jusqu'à 1 qui est leur limite.



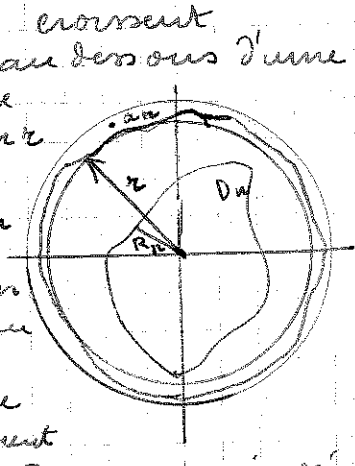
Appliquons la transformation $v_{n+1}(z)$ au domaine D_n et en particulier au cercle de rayon R_n (distance minima). Ce cercle est transformé en un certain domaine et le résultat de la transformation ne dépend que de R_n et a_n puisque $v_{n+1} = v_1(z_n, a_n)$ et où $z_n = R_n e^{i\theta}$.

Par suite si R'_n est la distance minima du transformé du cercle R_n on aura que:

$$R'_n - R_n = \Psi(R_n, a_n)$$

En assurant que a_n soit hors du domaine D_n, ce qui est fait, on aura en vertu des propriétés des fonctions v que la fonction $\Psi(R_n, a_n)$ est positive et ne s'annule pas (puisque R_n croît et $R'_n > R_n$)

Supposons maintenant que les R_n croissent toujours mais qu'ils restent toujours au-dessous d'une valeur inférieure à l'unité. C'est-à-dire que les R_n restent égaux ou inférieurs au rayon r d'un certain cercle, inférieur à 1. Mais alors voilà la contradiction. Prenons a_n entre le cercle de rayon r et le cercle unitaire. Il est sûr que a_n est extérieur au domaine D_n. Par suite la différence



$$R'_n - R_n > 0$$

On pourra dire la même chose pour le cercle de rayon r et on aura sûrement que la distance minimum du domaine transformé r' est supérieure à r. Or ceci est contraire à l'hypothèse que les R_n s'arrêtent à r. Par suite les R_n ne peuvent

s'arrêter au rayon d'un cercle inférieur au cercle unitaire.
D'autre part on a évidemment que :

$$R_{n+1} \geq R'_n$$

car R'_n est la distance minima d'un domaine ~~dont~~ quand le transformé ~~est intérieur~~ d'un domaine intérieur au domaine dont la distance minima du transformé est R_{n+1}.
(le cercle R_n est intérieur à D_n, donc le transformé du cercle R_n est intérieur au domaine D_{n+1})
alors on a :

$$R_{n+1} - R_n > \psi(R_n, a_n) > 0$$

Ainsi les R_ν sont bien des valeurs croissantes et comme ils augmentent constamment sans arrêt, ~~jusqu'à~~ leur limite est l'unité car ils ne peuvent dépasser l'unité (puisque les domaines D_ν restent toujours à l'intérieur du cercle d'après la 2e propriété des fonctions v). Ainsi on a bien que $R_n \to 1$.
Il reste à montrer que la suite des fonctions z_ν est convergentes.

Pour montrer ceci considérons l'égalité :

$$z_{n+m} = v_{n,m}(z_n)$$

Expliquons cette égalité. Nous savons que :

$$z_{n+1} = v_1(z_n, a_n)$$

On aura $\quad z_{n+2} = v_1(z_{n+1}, a_{n+1})$

Comme z_{n+1} est fonction de z_n on voit que z_{n+2} est fonction de z_n. Pour distinguer cette fonction de $v_n(t)$ nous employons le double indice et ainsi on a bien :

$$z_{n+m} = v_{n,m}(z_n)$$

(par exemple, z_6 serait une fonction de z_3 en passant de z_5 à z_4 et de z_4 à z_3 ..)

Cette égalité transforme le domaine D_n en D_{n+m}. De plus les fonction $v_{n,m}(z_n)$ remplissent les conditions des fonctions v car elles ne sont que des combinaisons des fonctions v. Nous pourrons donc appliquer les conséquences du lemme de Schwarz car nous avons bien que $v_{n,m}(z_n)$ remplit les conditions de Schwarz. En effet :
z_{n+m} transforme le domaine D_n en D_{n+m}
Inversement z_n transforme le domaine D en D_n
par suite z_n jouit des propriétés de Schwarz dans le domaine D_{n+m} puisque c'est l'inverse de l'inverse d'une fonction de Schwarz. En appliquant l'égalité (3) de la page 181 nous aurons en prenant pour cercle R le cercle de rayon R_n qui est d'ailleurs inférieur à R_{n+m}

$$|v_{n,m} - v'_{n,m}(0)\, z_n| \leq \frac{\left(\frac{|z_n|}{R_n}\right)^2}{1 - \frac{|z_n|}{R_n}} \left(1 - R_n |v'_{n,m}(0)|\right)^2$$

D'autre part on peut écrire :

$$z_{n+m} - z_n = \left(z_{n+m} - v'_{n,m}(0)\, z_n\right) + \left[v'_{n,m}(0) - 1\right] z_n$$

(ajouté et retranché $v'_{n,m}(0) z_n$)

On voit que $z_{n+m} - z_n$ égale la somme de 2 quantités ; ensuite sa valeur absolue est égale [inférieure] à la somme des valeurs absolues des 2 membres :

$$|z_{n+m} - z_n| \leqq |z_{n+m} - v'_{n,m}(0)\, z_n| + |v'_{n,m}(0) - 1|$$

on a supprimé $|z_n|$ car $|z_n| < 1$ et sa suppression ne fait qu'augmenter le second membre.

Quant à $v'_{n,m}(0)$ on sait que :

$$1 < |v'_{n,m}(0)| < \frac{1}{R_n}$$

En effet $|v'_{n,m}(0)| < \frac{1}{R_n}$ vient directement de Lemme de Schwarz en première conséquence p. 177

Quant à $1 < |v'_{n,m}(0)|$ cela provient du fait que l'on avait : $\left(\frac{dz_1}{dz}\right)_{z=0} = \left|\frac{1}{\sqrt{a}}\right|$, comme

$|a| < 1$ on a que $\left|\frac{1}{\sqrt{a}}\right| > 1$ donc $\left(\frac{dz_1}{dz}\right)_{z=0} > 1$

De même on peut voir que $\left(\frac{dz_2}{dz_1}\right)_{z_1=0} = \left|\frac{1}{\sqrt{a_1}}\right|$ puisque z_1 joue par rapport à z_2 le même rôle que z par rapport à z_1

et ainsi :

$$v'_{n,m}(0) = \left(\frac{dz_{n+m}}{dz_n}\right)_{z_n=0} = \left(\frac{dz_{n+m}}{dz_{n+m-1}}\right)_{z_{n+m-1}=0} \cdot \left(\frac{dz_{n+m-1}}{dz_{n+m-2}}\right)_{z_{n+m-2}=0} \cdots \left(\frac{dz_{n+2}}{dz_{n+1}}\right)_{z_{n+1}=0} \cdot \left(\frac{dz_{n+1}}{dz_n}\right)_{z_n=0}$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{a_{n+m-1}}}\right| \cdot \left|\frac{1}{\sqrt{a_{n+m-2}}}\right| \cdots \left|\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right| \left|\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right|$$

Comme $|a_r| < 1$ on aura bien que le produit ci-dessus est supérieur à 1. Donc on a bien :

$$1 < |v'_{n,m}(0)| < \frac{1}{R_n}$$

Alors en remplaçant ci-dessus : $\left(z_{n+m} - v'_{n,m}(0)\, z_n\right)$ par la valeur au bas de la page précédente et $|v'_{n,m}(0) - 1|$ par la valeur supérieure $\left(\frac{1}{R_n} - 1\right)$

on aura que :

$$|z_{n+m} - z_n| \leqq \frac{\left(\frac{|z_n|}{R_n}\right)^2}{1 - \frac{|z_n|}{R_n}} \left(1 - R_n^2\, |v'_{n,m}(0)|^2\right) + \left(\frac{1}{R_n} - 1\right)$$

comme $|v'_{n,m}| > 1$ on peut remplacer $1 - R_n^2 |v'_{n,m}(0)|^2$ par la valeur supérieure $1 - R_n^2$. Alors :

$$|z_{n+m} - z_n| \leq \frac{\frac{|z_n|^2}{R_n^2}}{1 - \frac{|z|}{R_n}} \left(1 - R_n^2\right) + \left(\frac{1}{R_n} - 1\right) \qquad (1)$$

On voit que si n augmente indéfiniment $R_n \to 1$ et alors

$$|z_{n+m} - z_n| \to 0$$

et ainsi on a bien une suite convergente. Seulement il y a une petite difficulté : il faut que la quantité

$$1 - \frac{|z_n|}{R_n}$$

soit différente de 0 car sinon on aurait la forme $\frac{0}{0}$ pour la première partie du second membre de l'égalité (1).

Or on a vu page 182 qu'une certaine fonction f reste inférieure à une borne qui est elle même inférieure à 1. De plus cette borne ne dépend que de la valeur de la fonction à l'origine.
Appliquons ceci à z_n. Comme z_n a une valeur déterminée à l'origine on aura bien que $|z_n|$ sera inférieur à une certaine borne, inférieure elle même à l'unité. Il s'ensuit donc que les valeurs de $|z_n|$ sont enfermées dans un certain domaine. Par suite on peut considérer $|z_n|$ comme une constante et ainsi on a bien que
$$1 - \frac{|z_n|}{R_n}$$
n'est pas 0.

On a donc montré l'existence de solution du problème de Riemann et en conséquence aussi du problème de Dirichlet